

Theorie der Druckstabilität der Sandwichplatte I.

Von H. Neuber, Dresden

Für die Sandwichplatte (dreischichtige Platte) werden die Grundlagen der elastischen Stabilität in der vom Vf. 1943 aufgestellten verschärften Form³⁾ integriert. Die Lösung klärt den Einfluß der verschiedenen Parameter auf die Knicklast und bestätigt einwandfrei die Existenz von zwei charakteristischen Instabilitätsbereichen.

The basical equations of elastic stability are integrated for sandwich plates in the exact form stated by the author 1943³⁾. The solution clears the influence of the different parameters on the buckling load and shows the existence of two characteristic regions of buckling.

Les équations fondamentales de l'élastique stabilité sont intégrées pour des plaques à Sandwich dans leur form exacte, donnée par l'auteur 1943³⁾. La solution montre l'influence des paramètres différentes. L'existence des deux domaines d'écrasement est démontrée.

Основы упругой устойчивости сандвичной пластины (трехслойной пластины) интегрируются в уточненной форме³⁾, данной автором в 1943 г. Решение выясняет влияние различных параметров на усилие продольного изгиба и безусловно подтверждает существование двух характеристических областей неустойчивости.

1. Übersicht

Der Begriff „Sandwichplatte“ bezieht sich auf geschichtete Platten (auch Verbundplatten genannt); man versteht darunter ebene Platten, die aus mehreren Schichten verschiedener Baustoffe hergestellt sind. Bei geeigneter Wahl der Abmessungen der einzelnen Schichten, sowie der Werkstoffe zeichnen sich solche Platten durch besonders geringes Gewicht bei verhältnismäßig hoher Steifigkeit aus.

Vorliegender Bericht, der als Fortsetzung meiner früheren Arbeiten über das Verbundstabproblem¹⁾ entstanden ist, gibt im technisch besonders wichtigen Falle der Druckbeanspruchung über die günstigsten Abmessungen solcher Platten Aufschluß. Hierbei macht die naheliegende Frage der Konkurrenzfähigkeit mit entsprechenden Baugliedern der Blechbauweise eine besonders sorgfältige Behandlung des Stabilitätsproblems erforderlich, um so mehr, als eine über den Gegenstand bereits vorhandene englische Arbeit²⁾ weitgehende Vernachlässigungen enthält, derart, daß sich dort u. a. der Grenzübergang zum Euler-Verhalten des Gesamtquerschnittes, der für große Knicklängen erfüllt sein muß, für die dreischichtige Platte noch nicht herausstellte. Um dieser Forderung zu genügen, mußte eine möglichst strenge Lösung des Problems der Druckstabilität der Verbundplatte angestrebt werden. Wie im vorliegenden Bericht nachgewiesen wird, gelingt es im Anschluß an meine Arbeiten über die Grundgleichungen der elastischen Stabilität und ihre Integration³⁾, die strenge Lösung des Problems aufzustellen (genaue Formulierung der Randbedingung beim Übergang von einer Schicht zur benachbarten, Berücksichtigung der Druckvorspannungen auch in der leichteren Schicht usw.) Die Rechnung wird für die beiden wichtigsten Fälle der Zweistoffbauweise, die zweischichtige und die dreischichtige Platte durchgeführt; sie liefert jeweils eine Beziehung für den kritischen Wert der Zusammendrückung (Eigenwert) und damit für die Knicklast. Die Auswertung bestätigt einwandfrei die Existenz eines für große Knicklängen geltenden Eulerbereiches des Gesamtquerschnittes. Zur Unterscheidung vom Falle der selbständigen Knickung oder Beulung der dünnen Außenschicht („erster Eulerbereich“) wird der erwähnte Bereich als „zweiter Eulerbereich“ gekennzeichnet.

Zur bequemen Ermittlung der optimalen Knicklast bzw. der günstigsten Wandstärken wurden besondere Diagramme entwickelt, in welchen ein der Knicklast entsprechender dimensionsloser Kennwert über der reziproken Länge aufgetragen ist. Dieser Teil des Berichtes geht wesentlich über die bereits in einem früheren Bericht⁴⁾ gebrachten Ergebnisse hinaus. Eine im Anschluß an jenen Bericht erschienene Arbeit von Flüge und Marguerre⁵⁾ gibt zur Ermittlung

¹⁾ H. Neuber, Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. (1941), S. I 491; ferner: Techn. Berichte 11 (1944), Nr. 2, ID 022.

²⁾ Gough-Elam-de Bruyne, J. Roy. Aeron. Soc., April 1940.

³⁾ H. Neuber, Z. angew. Math. Mech. 23 (1943), S. 321.

⁴⁾ H. Neuber, Druckstabilität der Verbundplatte; Vorbericht (LFA) 1944.

⁵⁾ Flüge-Marguerre: Untersuchungen und Mitteilungen, Nr. 1360.

der optimalen Knicklast ein Näherungsverfahren an. Anlässlich eines Gastvortrages, den Herr Marguerre über das vorliegende Problem an der TH. Dresden im September 1951 hielt, teilte mir Herr Marguerre mit, daß eine neue Veröffentlichung dieses Dimensionierungsverfahrens in Frankreich beabsichtigt ist. Jenes Verfahren hat zum Ziel, die Vielzahl der auftretenden Parameter durch Näherungsbetrachtungen unter Ausnutzung funktionaler Zusammenhänge soweit zu verringern, daß sich eine für praktische Zwecke geeignete Methode ergibt. Die Grundlage der hierbei benutzten Betrachtungsweise bildet jedoch die von mir bereits im Jahre 1944 aufgestellte strenge Lösung des Problems⁴⁾, insbesondere der exakte funktionale Zusammenhang zwischen der Stauchung und der sogenannten reduzierten Wandstärke (Verhältnis der π -fachen Wandstärke zur Knickhalbwelle).

Diese Lösung, welche in den Jahren 1945 und 1946 weiter vervollkommen wurde, wird nunmehr mit der vorliegenden Arbeit veröffentlicht. Dabei sind die verschiedenen Grade der Idealisierung klar herausgestellt. Bei der 1. Idealisierung handelt es sich um die Ausnutzung der Tatsache, daß die Stauchung wesentlich kleiner als 1 ist. Bei der 2. Idealisierung wird die reduzierte Wandstärke der Außenhaut kleiner als 1 und kleiner als die reduzierte Gesamtwandstärke vorausgesetzt. Bei der 3. Idealisierung wird außerdem auch die reduzierte Gesamtwandstärke kleiner als 1 angenommen. Die exakten Formeln werden im vorliegenden Bericht innerhalb jedes Idealisierungsbereiches explizit aufgestellt. Für die zweischichtige und dreischichtige Platte wird der Zusammenhang zwischen Stauchung und reduzierter Wandstärke einerseits, sowie zwischen der Knicklast und dem Verhältnis von Wandstärke zu Baulänge in Diagrammen wiedergegeben. In den Knicklastdiagrammen sind außerdem die Kurven für konstantes Baugewicht eingezeichnet, so daß damit bereits eine exakte Optimallösung gefunden werden kann, die für die praktische Anwendung von grundlegender Bedeutung ist.

2. Die Grundgleichungen des Problems

Als Ausgangsgleichungen des Druckstabilitätsproblems dienen die Gl. (50) der Arbeit des Verfassers über die Grundgleichungen der elastischen Stabilität³⁾. In kartesischen Koordinaten x, y, z ohne Massenkraft lauten diese Gleichungen

$$\sum_{r,t=x,y,z} \left(\frac{\partial K_{rs}}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_t}{\partial r \partial t} K_{rs} + \frac{\partial^2 V_s}{\partial r \partial t} K_{rt} \right) = 0 \quad \text{für } s = x, y, z \dots \dots \dots (1).$$

Hierin ist K_{rs} der Spannungstensor nach der Deformation und V_r der elastische Verschiebungsvektor. Die x -Achse möge entsprechend der auf Bild 1 ersichtlichen Skizze parallel zur Plattenebene und in Richtung der Druckkräfte liegen, während die y -Achse senkrecht zur Plattenebene orientiert ist.

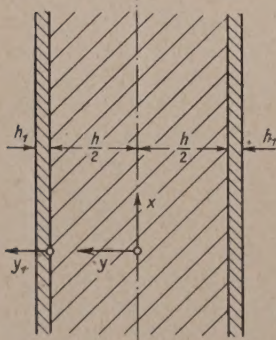


Bild 1. Bezeichnungen bei der dreischichtigen Platte

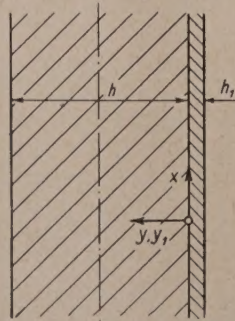


Bild 2. Bezeichnungen bei der zweischichtigen Platte

Die ersten Ableitungen des Verschiebungsvektors liefern den Formänderungstensor

$$d_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial s} + \frac{\partial V_s}{\partial r} \right) \dots \dots (2),$$

welcher durch das Hookesche Gesetz mit dem Tensor t_{rs} der bei der Knickdeformation geweckten Spannungen verknüpft ist:

$$t_{rs} = 2G \left(d_{rs} + \delta_{rs} \frac{e}{m-2} \right) \dots \dots (3).$$

Hierbei ist

$$e = \sum_{t=x,y,z} \frac{\partial V_t}{\partial t} = \sum_{t=x,y,z} d_{tt} \dots \dots \dots (4)$$

die Volumdehnung, während

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{für } r = s \\ 0 & \text{für } r \neq s \end{cases} \dots \dots \dots (5)$$

dem Kroneckerschen Symbol entspricht.

Für schmale, d.h. stabartige Platten gilt der ebene Spannungszustand mit $t_{zz} = 0$, wobei die Spannungskomponenten nur von x und y abhängen, wenn von kleinen Zusatzgliedern mit z^2 abgesehen wird. Aus Gl. (3) folgt hier

$$d_{zz} = -\frac{e}{m-2} \dots \dots \dots (6).$$

Wird die Summe der Dehnungen in der Plattenebene mit e^* bezeichnet, d. h.

$$e^* = d_{xx} + d_{yy}, \quad e = e^* + d_{zz}, \quad \dots \quad (7),$$

so ergibt sich aus Gl. (6) nach Elimination von d_{zz} :

$$\frac{e}{m-2} = \frac{e^*}{m-1} \quad \dots \quad (8).$$

Danach lautet das H o o k e s c h e Gesetz für die ebenen Spannungskomponenten

$$t_{rs} = 2G \left(d_{rs} + \delta_{rs} \frac{e^*}{m-1} \right) \quad \text{für } r, s = x, y \quad \dots \quad (9).$$

Die entsprechend Gl. (2) an sich noch auftretenden Schubkomponenten t_{xz} und t_{yz} werden hierbei vernachlässigt.

Für breite Platten, die hier den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung bilden, gilt der ebene Formänderungszustand, bei welchem vorausgesetzt wird, daß die dritte Verschiebungskomponente verschwindet und die Spannungen im übrigen wieder nur von x und y abhängen. Die Schubspannungen t_{xz} und t_{yz} verschwinden dann exakt, während für die ebenen Spannungskomponenten Gl. (3) mit e^* statt e bestehen bleibt:

$$t_{rs} = 2G \left(d_{rs} + \delta_{rs} \frac{e^*}{m-2} \right) \quad \text{für } r, s = x, y \quad \dots \quad (9a).$$

Die beiden Formulierungen des Hookeschen Gesetzes (Gl. (9) bzw. (9a)) können bei Einführung einer Größe c entsprechend der Festsetzung

$$c = \frac{1}{m} \quad \text{für breite Platten (ebener Formänderungszustand),}$$

bzw.

$$c = \frac{1}{m+1} \quad \text{für Stäbe und schmale Platten (ebener Spannungszustand),} \quad (10)$$

in der gemeinsamen Form

$$t_{rs} = 2G \left(d_{rs} + \delta_{rs} \frac{ce^*}{1-2c} \right) \quad \dots \quad (11)$$

geschrieben werden, die nachstehend weitere Verwendung finden soll.

In Gl. (1) ist zu beachten, daß K_{rs} den Spannungstensor nach der Deformation kennzeichnet. Da beim praktischen Problem stets nur der Vorspannungstensor vor der Deformation bekannt ist, welcher hier mit T_{rs} gekennzeichnet werden soll, so muß noch eine Beziehung zur Ermittlung von K_{rs} eingeschaltet werden. Der exakte Weg würde⁶⁾ eine eingehende Untersuchung der Vordeformation erforderlich machen, wobei es auf sehr kleine, kaum meßbare Größen ankäme. Für praktische Zwecke ist es zu empfehlen, diese Schwierigkeit durch Einschaltung einer physikalisch sinnvollen Annahme zu umgehen, wie es auch in der Literatur (meist unbewußt) geschehen ist.

Verf. empfiehlt folgende Beziehung

$$K_{rs} = T_{rs} + t_{rs} - \sum_{t=x,y,z} (d_{rt} T_{st} + d_{st} T_{rt}) \quad \dots \quad (12),$$

welche auf der Tatsache beruht, daß die mit dem Knickvorgang verknüpfte Deformation für ein, die (quasi-starre) Drehung des Materials mitmachendes Koordinatensystem einer Transformation entspricht, welche aus den Ableitungen des Verschiebungsvektors hervorgeht, wenn die Drehungen

$$\omega_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial s} - \frac{\partial V_s}{\partial r} \right) \quad \dots \quad (13)$$

unberücksichtigt bleiben, wenn also in der Gleichung

$$\frac{\partial V_r}{\partial s} = d_{rs} + \omega_{rs} \quad \dots \quad (14)$$

nur das erste Glied der rechten Seite Berücksichtigung findet. Dann setzt sich K_{rs} additiv aus dem ursprünglichen Vorspannungstensor T_{rs} , dem bei der elastischen Deformation geweckten Tensor t_{rs} und den infolge der Dehnungstransformation hinzukommenden Anteilen von T_{rs} zusammen, und man erhält Gl. (12).

⁶⁾ Siehe Anm. 3).

Werden die Komponenten des Vorspannungstensors T_{rs} als von den Koordinaten unabhängig vorausgesetzt, d.h.

$$\frac{\partial T_{rs}}{\partial t} = 0 \quad \dots \quad (15),$$

so ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (12) in Gl. (1) folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum_{r,t=x,y,z} \sum \left(\frac{\partial t_{rs}}{\partial r} + \frac{\partial \omega_{rt}}{\partial r} T_{st} + \frac{\partial \omega_{st}}{\partial r} T_{rt} \right) = 0 \quad \dots \quad (16)$$

oder

$$\sum_{r,t=x,y,z} \sum \left(\frac{\partial t_{rs}}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} - \frac{\partial V_t}{\partial r} \right) T_{st} + \left(\frac{\partial V_s}{\partial t} - \frac{\partial V_t}{\partial s} \right) T_{rt} \right) \right) = 0 \quad \dots \quad (17).$$

Bei dem hier zu untersuchenden ebenen Problem ist nur über x, y zu summieren (Drehungen aus der x, y -Ebene heraus bleiben unberücksichtigt) und der Vorspannungstensor T_{rs} hat die einzige Komponente

$$T_{xx} = 2GS \quad \dots \quad (18).$$

Die Einführung der Größe S ist in dieser Form bei der weiteren Rechnung vorteilhaft. Die Gl. (17) gehen so über in

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + GS \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + GS \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (19).$$

Aus den Gl. (11) ergibt sich

$$t_{xx} = 2G \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{c e^*}{1-2c} \right), \quad t_{yy} = 2G \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{c e^*}{1-2c} \right), \quad t_{xy} = G \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \quad (20).$$

Durch Addition der ersten beiden Gleichungen folgt

$$t_{xx} + t_{yy} = \frac{2G}{1-2c} e^* \quad \dots \quad (21),$$

so daß die Auflösung nach den Dehnungen auf die in anderer Schreibweise bekannten Beziehungen

$$2G \frac{\partial V_x}{\partial x} = t_{xx} - c(t_{xx} + t_{yy}), \quad 2G \frac{\partial V_y}{\partial y} = t_{yy} - c(t_{xx} + t_{yy}) \quad \dots \quad (22)$$

führt. Demnach wird

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = \frac{1}{G} \left[-\frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial x} - c \frac{\partial}{\partial x} (t_{xx} + t_{yy}) \right] \quad \dots \quad (23)$$

und entsprechend

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G} \left[\frac{\partial t_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial t_{xx}}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial y} (t_{xx} + t_{yy}) \right] \quad \dots \quad (24).$$

Nunmehr lassen sich in den Gl. (19) alle Verschiebungskomponenten eliminieren, und es folgen

$$\left. \begin{aligned} (1-cS) \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + (1-S) \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + (1-c)S \frac{\partial t_{yy}}{\partial x} &= 0, \\ (1+cS) \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + (1+S) \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} - (1-c)S \frac{\partial t_{xx}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (25).$$

Diese Gleichungen stellen die endgültigen Gleichgewichtsbedingungen des Problems dar.

Zur vollständigen Behandlung des Problems ist noch eine weitere Gleichung erforderlich, die sog. Kompatibilitätsbedingung. Sie folgt allein aus den Formänderungsbedingungen und wird z. B. erhalten, wenn die erste der Gl. (22) zweimal nach y , die zweite zweimal nach x differenziert wird und hiervon die mit 2 multiplizierte und nach x und y differenzierte dritte der Gleichungen (20) subtrahiert wird, und lautet

$$\frac{\partial^2 t_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 t_{xy}}{\partial x \partial y} - c \Delta (t_{xx} + t_{yy}) = 0 \quad \dots \quad (26).$$

Hierbei ist Δ der Laplacesche Operator in der x, y -Ebene:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \dots \quad (27).$$

3. Die Integration der Grundgleichungen

Die Grundgleichungen (25) lassen sich durch Einführung einer Spannungsfunktion integrieren. Werden die Spannungskomponenten nämlich entsprechend folgendem Ansatz aus einer Spannungsfunktion hergeleitet, so sind die Grundgleichungen identisch erfüllt:

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= (1-S)(1+cS) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - (1-c)S(1+S) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ t_{yy} &= (1+S)(1-cS) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (1-c)S(1-S) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ t_{xy} &= [-1 + (-1+2c)S^2] \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28).$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gl. (25) ist die Richtigkeit des Ansatzes ohne weiteres ersichtlich.

Andererseits führt die Kompatibilitätsbedingung (26) durch Einsetzen der Ausdrücke für die Spannungskomponenten auf die Differentialgleichung der Spannungsfunktion F und damit des Problems. Unter Umgehung einer kurzen Zwischenrechnung ergibt sich

$$\Delta \left[(1+S) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (1-S) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] = 0 \dots \dots \dots (29)$$

oder mit Einführung der Größe

$$\frac{1+S}{1-S} = \varrho^2 \dots \dots \dots (30):$$

$$\Delta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial (\varrho y)^2} \right) = 0 \dots \dots \dots (31).$$

Hieraus geht hervor, daß F sich aus zwei Arten harmonischer Funktionen aufbaut, und zwar solchen des x, y -Systems und solchen des $x, (\varrho y)$ -Systems; d. h. es kann gesetzt werden:

$$F(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, \varrho y) \dots \dots \dots (31a),$$

wobei

$$\Delta \Phi_1(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \Phi_2(x, y) = 0 \dots \dots \dots (32)$$

gilt. Es könnte auch eine Substitution durch komplexe Funktionen vorgenommen werden, was hier jedoch nicht lohnt, da schon einfache Funktionen zur Lösung des Problems ausreichen. Es genügt nämlich zur Lösung bereits der folgende einfache Ansatz, wobei zu beachten ist, daß für jede Schicht der Platte eine besondere Spannungsfunktion definiert werden muß.

Für die dicke Schicht (Füll- oder Stüttschicht):

$$F = \sin(\varphi x) [A \sin(\varphi y) + B \sin(\varrho \varphi y) + C \cos(\varphi y) + D \cos(\varrho \varphi y)] \dots \dots (33).$$

Für die Außenschicht („Blech“, Index 1):

$$F_1 = \sin(\varphi x) [A_1 \sin(\varphi y_1) + B_1 \sin(\varrho_1 \varphi y_1) + C_1 \cos(\varphi y_1) + D_1 \cos(\varrho_1 \varphi y_1)] \dots (34).$$

Mit Bezug auf Gl. (18) ist

$$S = \frac{T_{xx}}{2G} = \left(1 + \frac{1}{m} \right) \varepsilon \dots \dots \dots (35).$$

Hierbei stellt ε die für alle Schichten gleich große negative Vordehnung dar. Demnach nimmt auch S für jede Schicht einen anderen Wert an, sofern die Poissonsche Konstante einen anderen Wert besitzt. Da dieser Einfluß jedoch nicht wesentlich ist und nur die Rechnung erschweren würde, soll zur Vereinfachung $1/m = 1/m_1$ und damit $c = c_1$, $S = S_1$, $\varrho = \varrho_1$ angenommen werden. Die Koordinate y_1 wird bei der dreischichtigen Platte (Bild 1) zweckmäßig mit $y - h/2$ festgelegt, während sie bei der zweischichtigen Platte (Bild 2) mit y identisch ist. Die Funktion $\sin(\varphi x)$ bedeutet eine sinusförmige Durchbiegung der Platte beim Knicken. Wird die Knickhalbwelle mit l bezeichnet, so entspricht φl der halben Periode der Sinusfunktion, d. h. es gilt $\varphi = \pi/l$.

4. Aufstellung der Randbedingungen

An der Übergangsstelle (Verbundstelle) von einer Schicht zur benachbarten halten sich die an der Grenzfläche angreifenden Spannungskomponenten das Gleichgewicht. Zugleich ist bei absolutem Haften der Flächen aneinander eine Übereinstimmung der Verschiebungskomponen-

ten zu erwarten. An den freien Oberflächen verschwinden andererseits die Randspannungen. Es gelten daher folgende Randbedingungen:

$$\text{An der Verbundstelle: } \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } K_{xy} - K_{xy}^1 = 0, \\ \text{II. } K_{yy} - K_{yy}^1 = 0, \\ \text{III. } V_x - V_x^1 = 0, \\ \text{IV. } V_y - V_y^1 = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (36).$$

Freie Oberfläche der Außenschicht:

$$\text{V. } K_{xy}^1 = 0, \quad \text{VI. } K_{yy}^1 = 0 \dots \dots \dots (37).$$

Freie Oberfläche der Stützschiicht:

$$\text{VII. } K_{xy} = 0, \quad \text{VIII. } K_{yy} = 0 \dots \dots \dots (38).$$

Bei der dreischichtigen Platte genügt infolge der Symmetrie die Beschränkung auf eine Seite des Systems, so daß nur eine Außenschicht betrachtet wird; die Gl. (38) treten nicht auf. Ferner sind beim gegensymmetrischen Knickfall die Konstanten C und D , beim symmetrischen Knickfall A und B in Gl. (33) Null zu setzen. Die restlichen 6 Konstanten sind alsdann aus den sechs Bedingungen (I bis VI) zu ermitteln. Bei der zweischichtigen Platte sind sämtliche Gleichungen zu berücksichtigen und aus ihnen die 8 Konstanten zu bestimmen. Da das System der Bestimmungsgleichungen in jedem Falle homogen ist, existiert nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn die Determinante verschwindet. Aus dieser Bedingung folgt mithin jeweils der kritische Wert von S bzw. ε .

Der Rechnungsgang besteht zunächst darin, die in den Randbedingungen auftretenden Spannungs- und Verschiebungskomponenten auf die Spannungsfunktion zurückzuführen.

Für K_{xy} und K_{yy} gilt mit Bezug auf Gl. (11), (12) und (18)

$$K_{xy} = t_{xy} - d_{xy} T_{xx} = (1 - S) t_{xy}, \quad K_{yy} = t_{yy} \dots \dots \dots (39).$$

Aus den Gl. (28) folgt dann weiter

$$\left. \begin{array}{l} K_{xy} = (1 - S) [-1 - (1 - 2c) S^2] \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ K_{yy} = (1 + S) (1 - c S) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (1 - c) S (1 - S) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (40).$$

Um die in den Randbedingungen III und IV auftretenden Verschiebungskomponenten gleichfalls auf die Spannungsfunktion zurückführen zu können, ist es erforderlich, nach x zu differenzieren (dies ist zulässig, da die Randbedingungen für einen konstanten y -Wert gelten). Mit Bezug auf die Gl. (22) und (28) folgt für die erste Ableitung von V_x :

$$2G \frac{\partial V_x}{\partial x} = (1 + S) [-c + (-1 + 2c) S] \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (1 - c) (1 - S) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \dots \dots \dots (41).$$

Entsprechend ergibt sich für die zweite Ableitung von V_y :

$$\left. \begin{array}{l} 2G \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} = 2G \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} \right] \\ = [-2 + c + (1 - c) S + (-1 + 2c) S^2] \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - (1 - c) (1 - S) \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \end{array} \right\} (42).$$

Nunmehr können die Randbedingungen unmittelbar auf die Ansätze (33) und (34) Anwendung finden. Bei Unterdrückung gemeinsamer Faktoren ergeben sich mit den Abkürzungen $\varphi h = 2\beta$, $\varphi h_1 = \beta_1$ und $E_1/E = G_1/G = H$ folgende Gleichungssysteme:

A. Für die dreischichtige Platte mit gegensymmetrischer Auslenkung:
(Gl. I, II, III, IV mit $y = h/2$, $y_1 = 0$; Gl. V, VI mit $y_1 = h_1$; Gl. VII und VIII entfallen; $C = D = 0$; gegensymmetrischer Knickfall).

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } A \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \beta - A_1 + \varrho (B \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \varrho \beta - B_1) = 0, \\ \text{II. } (1 + (1 - 2c) S^2) (-A \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta + C_1) + (1 - S^2) (-B \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \varrho \beta + D_1) = 0, \\ \text{III. } (1 + (1 - 2c) S^2) (A H \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta - C_1) + (1 + S) (1 + (1 - 2c) S) (B H \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \varrho \beta - D_1) = 0, \\ \text{IV. } (1 + (1 - 2c) S^2) (A H \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \beta - A_1) + (1 - S) (1 - (1 - 2c) S) \varrho (B H \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \varrho \beta - B_1) = 0, \\ \text{V. } A_1 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \beta_1 + B_1 \varrho \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \varrho \beta_1 + C_1 \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta_1 + D_1 \varrho \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \varrho \beta_1 = 0, \\ \text{VI. } (1 + (1 - 2c) S^2) (A_1 \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \beta_1 + C_1 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \beta_1) + (1 - S^2) (B_1 \mathfrak{S} \mathfrak{i} \mathfrak{n} \varrho \beta_1 + D_1 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \varrho \beta_1) = 0. \end{array} \right\} (43).$$

C. Für die zweischichtige Platte:

(Gl. I, II, III, IV mit $y=0$, $y_1=0$; Gl. V, VI mit $y_1=-h_1$; Gl. VII, VIII mit $y=h$).

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } A - A_1 + \varrho(B - B_1) &= 0, \\ \text{II. } (1 + (1 - 2c)S^2)(C - C_1) + (1 - S^2)(D - D_1) &= 0, \\ \text{III. } (1 + (1 - 2c)S^2)(CH - C_1) + (1 + S)(1 + (1 - 2c)S)(DH - D_1) &= 0, \\ \text{IV. } (1 + (1 - 2c)S^2)(AH - A_1) + (1 - S)(1 - (1 - 2c)S)\varrho(BH - B_1) &= 0, \\ \text{V. } A_1\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\beta_1 + B_1\varrho\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\varrho\beta_1 - C_1\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta_1 - D_1\varrho\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\varrho\beta_1 &= 0, \\ \text{VI. } (1 + (1 - 2c)S^2)(-A_1\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta_1 + C_1\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\beta_1) + (1 - S^2)(-B_1\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\varrho\beta_1 + D_1\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\varrho\beta_1) &= 0, \\ \text{VII. } A\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}2\beta + B\varrho\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}2\varrho\beta + C\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}2\beta + D\varrho\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}2\varrho\beta &= 0, \\ \text{VIII. } (1 + (1 - 2c)S^2)(A\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}2\beta + C\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}2\beta) + (1 - S^2)(B\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}2\varrho\beta + D\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}2\varrho\beta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44).$$

Für den symmetrischen Knickfall der dreischichtigen Platte (Fall B) sind die Konstanten A und B (statt C und D), Null zu setzen. Das zugehörige Gleichungssystem geht aus (43) hervor, wenn $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\beta$ mit $\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\varrho\beta$ mit $\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\varrho\beta$ vertauscht wird. Es genügt daher, die Rechnung nur für eine der beiden Knickformen durchzuführen, da das Endergebnis mit Hilfe dieser Vertauschungsregel auch für die andere Knickform benutzt werden kann. Bei der zweischichtigen Platte tritt eine Unterscheidung verschiedener Knickformen nicht von vornherein auf.

5. Die Stabilitätsbedingung

Die weitere Rechnung besteht in der Auflösung der Gleichungssysteme (43) und (44), bzw. in der Aufstellung der aus dem Verschwinden der zugehörigen Koeffizientendeterminanten hervorgehenden Eigenwertgleichungen. Hierbei ist die Einführung folgender Abkürzungen von Vorteil:

$$\text{bzw.} \quad \left. \begin{aligned} \frac{1 - S^2}{1 + (1 - 2c)S^2} &= \psi, & \frac{(1 - S)[1 - (1 - 2c)S]}{1 + (1 - 2c)S^2} &= \mu, \\ \frac{(1 + S)[1 + (1 - 2c)S]}{1 + (1 - 2c)S^2} &= 2 - \mu \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (45).$$

Bei der dreischichtigen Platte, die zunächst behandelt werden soll, ergibt sich nach Division der Gleichungen II, III, IV und VI durch $(1 + (1 - 2c)S^2)$ folgende Koeffizientendeterminante:

	(A)	(B)	(A ₁)	(B ₁)	(C ₁)	(D ₁)	
I	$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\beta$	$\varrho\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\varrho\beta$	-1	$-\varrho$	0	0	
II	$-\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta$	$-\psi\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\varrho\beta$	0	0	1	ψ	
III	$H\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta$	$H(2 - \mu)\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\varrho\beta$	0	0	-1	$\mu - 2$	$= 0 \quad (46).$
IV	$H\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\beta$	$H\mu\varrho\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\varrho\beta$	-1	$-\mu\varrho$	0	0	
V	0	0	$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\beta_1$	$\varrho\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\varrho\beta_1$	$\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta_1$	$\varrho\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\varrho\beta_1$	
VI	0	0	$\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta_1$	$\psi\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\varrho\beta_1$	$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\beta_1$	$\psi\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\varrho\beta_1$	

Hierbei sind die Spalten durch die zugehörigen Konstanten gekennzeichnet, während die Reihen entsprechend den Gleichungen mit römischen Zahlen versehen sind. Da die Auflösung der Determinante auf einen Ausdruck führt, der H bis zur zweiten Potenz enthält, ist es vorteilhaft, von vornherein die Berücksichtigung des Parameters H dadurch zu erledigen, daß eine Zerlegung in die drei Fälle $H=0$, $H=1$ und $H=\infty$ vorgenommen wird. Wird der Wert der Determinante mit ϑ bezeichnet, so erfüllt der Ansatz

$$\vartheta = (1 - H)\vartheta_0 + H\vartheta_1 + H(H - 1)\vartheta_2 \dots \dots \dots (47)$$

die Bedingung, daß H nur bis zur zweiten Potenz auftritt; zugleich wird

$$(\vartheta)_{H=0} = \vartheta_0, \quad (\vartheta)_{H=1} = \vartheta_1, \quad \left(\frac{\vartheta}{H^2}\right)_{H=\infty} = \vartheta_2 \dots \dots \dots (48).$$

Der Vorteil dieser Zerlegung besteht in der einfachen Berechnung von ϑ_0 , ϑ_1 und ϑ_2 , da der Parameter H hierbei nicht mehr stört.

Für $H=0$ folgt ein Zerfall der Determinante in ein Produkt von zwei Determinanten:

$$\vartheta_0 = \vartheta_{00} \cdot \vartheta_{01} \dots \dots \dots (49),$$

wobei

$$\vartheta_{00} = \begin{vmatrix} & (A) & (B) \\ \text{I} & \mathfrak{Cof} \beta & \varrho \mathfrak{Cof} \varrho \beta \\ \text{II} & -\mathfrak{Sin} \beta & -\psi \mathfrak{Sin} \varrho \beta \end{vmatrix} = \varrho \mathfrak{Sin} \beta \mathfrak{Cof} \varrho \beta - \psi \mathfrak{Cof} \beta \mathfrak{Sin} \varrho \beta \dots \dots (50)$$

und

$$\vartheta_{01} = \begin{vmatrix} & (A_1) & (B_1) & (C_1) & (D_1) \\ \text{III} & 0 & 0 & -1 & \mu - 2 \\ \text{IV} & -1 & -\mu \varrho & 0 & 0 \\ \text{V} & \mathfrak{Cof} \beta_1 & \varrho \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 & \mathfrak{Sin} \beta_1 & \varrho \mathfrak{Sin} \varrho \beta_1 \\ \text{VI} & \mathfrak{Sin} \beta_1 & \psi \mathfrak{Sin} \varrho \beta_1 & \mathfrak{Cof} \beta_1 & \psi \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (51)$$

wird. Zur Berechnung von ϑ_{01} wird zweckmäßig folgende Umformung vorgenommen, bei welcher der Wert von ϑ_{01} unverändert bleibt:

$$(B_1) - \mu \varrho (A_1) = (B_1^*), \quad (D_1) + (\mu - 2)(C_1) = (D_1^*) \dots \dots \dots (52).$$

Wie erwähnt, sind die Spalten durch die zugehörigen Koeffizienten gekennzeichnet, so daß z.B. (A_1) die Spalte bedeutet, die zu den Koeffizienten von A_1 gehört. (B_1) und (D_1) gehen durch den Rechnungsgang (52) in die neuen Spalten (B_1^*) und (D_1^*) über, und die Determinante ϑ_{01} reduziert sich infolge der auftretenden Nullen auf die zweireihige Form:

$$\vartheta_{01} = \begin{vmatrix} & (B_1^*) & (D_1^*) \\ \text{V} & \varrho \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 - \mu \varrho \mathfrak{Cof} \beta_1 & \varrho \mathfrak{Sin} \varrho \beta_1 + (\mu - 2) \mathfrak{Sin} \beta_1 \\ \text{VI} & \psi \mathfrak{Sin} \varrho \beta_1 - \mu \varrho \mathfrak{Sin} \beta_1 & \psi \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 + (\mu - 2) \mathfrak{Cof} \beta_1 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (53).$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$\vartheta_{01} = \varrho \psi - \varrho \mu (\mu - 2) + (\varrho^2 \mu - \psi (\mu - 2)) \mathfrak{Sin} \beta_1 \mathfrak{Sin} \varrho \beta_1 + \varrho (-\mu \psi + \mu - 2) \mathfrak{Cof} \beta_1 \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 \quad (54).$$

Für $H=1$ ergibt sich aus Gl. (46) nach Anwendung der Rechnungsgänge:

$$(A) + (C_1) \mathfrak{Sin} \beta = (A^*), \quad (B) + (D_1) \mathfrak{Sin} \varrho \beta = (B^*) \dots \dots \dots (55)$$

die vierreihige Determinante:

$$\vartheta_1 = (\mu + \psi - 2) \cdot \begin{vmatrix} & (A^*) & (B^*) & (A_1) & (B_1) \\ \text{I} & \mathfrak{Cof} \beta & \varrho \mathfrak{Cof} \varrho \beta & -1 & -\varrho \\ \text{IV} & \mathfrak{Cof} \beta & \mu \varrho \mathfrak{Cof} \varrho \beta & -1 & -\mu \varrho \\ \text{V} & \mathfrak{Sin} \beta \mathfrak{Sin} \beta_1 & \varrho \mathfrak{Sin} \varrho \beta \mathfrak{Sin} \varrho \beta_1 & \mathfrak{Cof} \beta_1 & \varrho \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 \\ \text{VI} & \mathfrak{Sin} \beta \mathfrak{Cof} \beta_1 & \psi \mathfrak{Sin} \varrho \beta \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 & \mathfrak{Sin} \beta_1 & \psi \mathfrak{Sin} \varrho \beta_1 \end{vmatrix} \dots \dots (56).$$

Nach den Rechnungsgängen:

$$(A^*) + (A_1) \mathfrak{Cof} \beta = (A^{**}), \quad (B^*) + (B_1) \mathfrak{Cof} \varrho \beta = (B^{**}), \quad (B_1) - \mu \varrho (A_1) = (B_1^*) \quad (57)$$

kann auf zwei Reihen reduziert werden, und es folgt

$$\vartheta_1 = \varrho (\mu - 1) (\mu + \psi - 2) \cdot \begin{vmatrix} & (A^{**}) & (B^{**}) \\ \text{V} & \mathfrak{Cof} (\beta + \beta_1) & \varrho \mathfrak{Cof} \varrho (\beta + \beta_1) \\ \text{VI} & \mathfrak{Sin} (\beta + \beta_1) & \psi \mathfrak{Sin} \varrho (\beta + \beta_1) \end{vmatrix} \dots \dots (58)$$

bzw. nach Ausrechnung

$$\vartheta_1 = \varrho (\mu - 1) (2 - \mu - \psi) [\varrho \mathfrak{Sin} (\beta + \beta_1) \mathfrak{Cof} \varrho (\beta + \beta_1) - \psi \mathfrak{Cof} (\beta + \beta_1) \mathfrak{Sin} \varrho (\beta + \beta_1)]. \quad (59).$$

wobei

$$\vartheta_{00} = \begin{vmatrix} & (A) & (B) & (C) & (D) \\ \text{I} & 1 & \varrho & 0 & 0 \\ \text{II} & 0 & 0 & 1 & \psi \\ \text{VII} & \mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\beta & \varrho\mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\varrho\beta & \mathfrak{S}in2\beta & \varrho\mathfrak{S}in2\varrho\beta \\ \text{VIII} & \mathfrak{S}in2\beta & \psi\mathfrak{S}in2\varrho\beta & \mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\beta & \psi\mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\varrho\beta \end{vmatrix} \dots \dots \dots (68)$$

und

$$\vartheta_{01} = \begin{vmatrix} & (A_1) & (B_1) & (C_1) & (D_1) \\ \text{III} & 0 & 0 & -1 & \mu-2 \\ \text{IV} & -1 & -\mu\varrho & 0 & 0 \\ \text{V} & \mathfrak{C}o\mathfrak{f}\beta_1 & \varrho\mathfrak{C}o\mathfrak{f}\varrho\beta_1 & -\mathfrak{S}in\beta_1 & -\varrho\mathfrak{S}in\varrho\beta_1 \\ \text{VI} & -\mathfrak{S}in\beta_1 & -\psi\mathfrak{S}in\varrho\beta_1 & \mathfrak{C}o\mathfrak{f}\beta_1 & \psi\mathfrak{C}o\mathfrak{f}\varrho\beta_1 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (69)$$

wird. Für ϑ_{00} führt der Rechnungsgang

$$(B) - \varrho(A) = (B^*), \quad (D) - \psi(C) = (D^*) \dots \dots \dots (70).$$

auf die zweireihige Form

$$\vartheta_{00} = \begin{vmatrix} & (B^*) & (D^*) \\ \text{VII} & \varrho\mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\varrho\beta - \varrho\mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\beta & \varrho\mathfrak{S}in2\varrho\beta - \psi\mathfrak{S}in2\beta \\ \text{VIII} & \psi\mathfrak{S}in2\varrho\beta - \varrho\mathfrak{S}in2\beta & \psi\mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\varrho\beta - \psi\mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\beta \end{vmatrix} \dots \dots \dots (71),$$

während ϑ_{01} durch die Operation

$$(B_1) - \mu\varrho(A_1) = (B_1^*), \quad (D_1) + (\mu - 2)(C_1) = (D_1^*) \dots \dots \dots (72)$$

zweireihig wird:

$$\vartheta_{01} = \begin{vmatrix} & (B_1^*) & (D_1^*) \\ \text{V} & \varrho\mathfrak{C}o\mathfrak{f}\varrho\beta_1 - \mu\varrho\mathfrak{C}o\mathfrak{f}\beta_1 & -\varrho\mathfrak{S}in\varrho\beta_1 + (2 - \mu)\mathfrak{S}in\beta_1 \\ \text{VI} & -\psi\mathfrak{S}in\varrho\beta_1 + \mu\varrho\mathfrak{S}in\beta_1 & \psi\mathfrak{C}o\mathfrak{f}\varrho\beta_1 + (\mu - 2)\mathfrak{C}o\mathfrak{f}\beta_1 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (73).$$

Die Ausrechnung liefert:

$$\vartheta_{00} = 2\varrho\psi(-1 + \mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\beta\mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\varrho\beta) - (\varrho^2 + \psi^2)\mathfrak{S}in2\beta\mathfrak{S}in2\varrho\beta \dots \dots \dots (74),$$

$$\vartheta_{01} = \varrho(\psi + 2\mu - \mu^2) + \varrho(\mu - 2 - \mu\psi)\mathfrak{C}o\mathfrak{f}\beta_1\mathfrak{C}o\mathfrak{f}\varrho\beta_1 + (\varrho^2\mu + 2\psi - \mu\psi)\mathfrak{S}in\beta_1\mathfrak{S}in\varrho\beta_1. \dots (75).$$

Für $H=1$ kann man durch die Rechnungsgänge

$$(A) + (A_1) = (A^*), \quad (B) + (B_1) = (B^*), \quad (C) + (C_1) = (C^*), \quad (D) + (D_1) = (D^*) \quad (76)$$

gleichfalls einen Zerfall in zwei vierreihige Determinanten erreichen.

Es wird

$$\vartheta_1 = \vartheta_{10} \cdot \vartheta_{11} \dots \dots \dots (77)$$

mit

$$\vartheta_{10} = \begin{vmatrix} & (A^*) & (B^*) & (C^*) & (D^*) \\ \text{V} & \mathfrak{C}o\mathfrak{f}\beta_1 & \varrho\mathfrak{C}o\mathfrak{f}\varrho\beta_1 & -\mathfrak{S}in\beta_1 & -\varrho\mathfrak{S}in\varrho\beta_1 \\ \text{VI} & -\mathfrak{S}in\beta_1 & -\psi\mathfrak{S}in\varrho\beta_1 & \mathfrak{C}o\mathfrak{f}\beta_1 & \psi\mathfrak{C}o\mathfrak{f}\varrho\beta_1 \\ \text{VII} & \mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\beta & \varrho\mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\varrho\beta & \mathfrak{S}in2\beta & \varrho\mathfrak{S}in2\varrho\beta \\ \text{VIII} & \mathfrak{S}in2\beta & \psi\mathfrak{S}in2\varrho\beta & \mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\beta & \psi\mathfrak{C}o\mathfrak{f}2\varrho\beta \end{vmatrix} \dots \dots \dots (78)$$

und

$$\vartheta_{11} = \begin{vmatrix} (A_1) & (B_1) & (C_1) & (D_1) \\ \text{I} & -1 & -\varrho & 0 \\ \text{II} & 0 & 0 & -\psi \\ \text{III} & 0 & 0 & \mu - 2 \\ \text{IV} & -1 & -\mu\varrho & 0 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (79).$$

ϑ_{10} kann durch die Umformungen

$$(B^*) - \varrho \frac{\mathfrak{Cof} \varrho \beta_1}{\mathfrak{Cof} \beta_1} (A^*) = (B^{**}), \quad (C^*) + \mathfrak{Tg} \beta_1 \cdot (A^*) = (C^{**}), \quad (D^*) + \mathfrak{Tg} \varrho \beta_1 \cdot (B^*) = (D^{**}) \quad (80)$$

auf die dreireihige Form

$$\vartheta_{10} = \mathfrak{Cof} \beta_1 \begin{vmatrix} (B^{**}) & (C^{**}) & (D^{**}) \\ \text{VI} & -\psi \mathfrak{Sin} \varrho \beta_1 & 1 & \frac{\psi}{\mathfrak{Cof} \varrho \beta_1} \\ & + \varrho \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 \mathfrak{Tg} \beta_1 & \mathfrak{Cof} \beta_1 & \\ \text{VII} & \varrho \mathfrak{Cof} 2 \varrho \beta & \mathfrak{Sin} 2 \beta & \varrho \mathfrak{Sin} 2 \varrho \beta \\ & - \varrho \frac{\mathfrak{Cof} \varrho \beta_1}{\mathfrak{Cof} \beta_1} \mathfrak{Cof} 2 \beta + \mathfrak{Tg} \beta_1 \mathfrak{Cof} 2 \beta & + \varrho \mathfrak{Tg} \varrho \beta_1 \mathfrak{Cof} 2 \varrho \beta & \\ \text{VIII} & \psi \mathfrak{Sin} 2 \varrho \beta & \mathfrak{Cof} 2 \beta & \psi \mathfrak{Cof} 2 \varrho \beta \\ & - \varrho \frac{\mathfrak{Cof} \varrho \beta_1}{\mathfrak{Cof} \beta_1} \mathfrak{Sin} 2 \beta + \mathfrak{Tg} \beta_1 \mathfrak{Sin} 2 \beta & + \psi \mathfrak{Tg} \varrho \beta_1 \mathfrak{Sin} 2 \varrho \beta & \end{vmatrix} \dots \dots (81)$$

übergeführt werden, welche sich durch den weiteren Rechnungsgang

$$\left. \begin{aligned} (B^{**}) + (D^{**}) \mathfrak{Sin} \varrho \beta_1 \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 - (C^{**}) \varrho \mathfrak{Sin} \beta_1 \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 &= (B^{***}), \\ (D^{**}) - \psi \frac{\mathfrak{Cof} \beta_1}{\mathfrak{Cof} \varrho \beta_1} (C^{**}) &= (D^{***}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (82)$$

in die zweireihige Form

$$\vartheta_{10} = \begin{vmatrix} (D^{***}) & (B^{***}) \\ \text{VII} & \frac{\varrho}{\mathfrak{Cof} \varrho \beta_1} \mathfrak{Sin} \varrho (2\beta + \beta_1) & \varrho \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 \mathfrak{Cof} \varrho (2\beta + \beta_1) \\ & - \frac{\psi}{\mathfrak{Cof} \varrho \beta_1} \mathfrak{Sin} (2\beta + \beta_1) & - \varrho \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 \mathfrak{Cof} (2\beta + \beta_1) \\ \text{VIII} & \frac{\psi}{\mathfrak{Cof} \varrho \beta_1} \mathfrak{Cof} \varrho (2\beta + \beta_1) & \psi \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 \mathfrak{Sin} \varrho (2\beta + \beta_1) \\ & - \frac{\psi}{\mathfrak{Cof} \varrho \beta_1} \mathfrak{Cof} (2\beta + \beta_1) & - \varrho \mathfrak{Cof} \varrho \beta_1 \mathfrak{Sin} (2\beta + \beta_1) \end{vmatrix} \dots \dots \dots (83)$$

umwandeln läßt.

Nach Ausrechnung folgt

$$\vartheta_{10} = 2\varrho\psi(-1 + \mathfrak{Cof}(2\beta + \beta_1)\mathfrak{Cof}\varrho(2\beta + \beta_1)) - (\varrho^2 + \psi^2)\mathfrak{Sin}(2\beta + \beta_1)\mathfrak{Sin}\varrho(2\beta + \beta_1) \quad (84).$$

Für ϑ_{11} ist folgende Umformung zweckmäßig:

$$(B_1) - \varrho(A_1) = (B_1^*), \quad (D_1) - \psi(C_1) = (D_1^*) \dots \dots \dots (85).$$

Dann geht Gl. (79) in die zweireihige Form

$$\vartheta_{11} = \begin{vmatrix} (B_1^*) & (D_1^*) \\ \text{III} & 0 & \mu + \psi - 2 \\ \text{IV} & \varrho(\mu - 1) & 0 \end{vmatrix} \dots \dots \dots (86)$$

mit der Lösung

$$\vartheta_{11} = \varrho(\mu - 1)(2 - \mu - \psi) \quad (87)$$

über.

Im Falle $H = \infty$ werden in Gl. (66) zunächst die Reihen III und IV durch H dividiert; dann folgt für $H = \infty$ wieder ein Zerfall in zwei vierreihige Determinanten:

$$\left(\frac{\vartheta}{H^2}\right)_{H=\infty} = \vartheta_2 = \vartheta_{20} \cdot \vartheta_{21} \quad (88),$$

wobei

$$\vartheta_{20} = \begin{array}{c|cccc} & (A) & (B) & (C) & (D) \\ \hline \text{III} & 0 & 0 & 1 & 2 - \mu \\ \text{IV} & 1 & \mu \varrho & 0 & 0 \\ \text{VII} & \cos 2\beta & \varrho \cos 2\varrho\beta & \sin 2\beta & \varrho \sin 2\varrho\beta \\ \text{VIII} & \sin 2\beta & \psi \sin 2\varrho\beta & \cos 2\beta & \psi \cos 2\varrho\beta \end{array} \quad (89)$$

und

$$\vartheta_{21} = \begin{array}{c|cccc} & (A_1) & (B_1) & (C_1) & (D_1) \\ \hline \text{I} & -1 & -\varrho & 0 & 0 \\ \text{II} & 0 & 0 & -1 & -\psi \\ \text{V} & \cos \beta_1 & \varrho \cos \varrho\beta_1 & -\sin \beta_1 & -\varrho \sin \varrho\beta_1 \\ \text{VI} & -\sin \beta_1 & -\psi \sin \varrho\beta_1 & \cos \beta_1 & \psi \cos \varrho\beta_1 \end{array} \quad (90)$$

wird.

Zur Vereinfachung von ϑ_{20} dient die Umformung

$$(B) - \mu \varrho(A) = (B^*), \quad (D) + (\mu - 2)(C) = (D^*) \quad (91),$$

welche auf die zweireihige Form

$$\vartheta_{20} = \begin{array}{c|cc} & (B^*) & (D^*) \\ \hline \text{VII} & \varrho \cos 2\varrho\beta - \mu \varrho \cos 2\beta & \varrho \sin 2\varrho\beta + (\mu - 2) \sin 2\beta \\ \text{VIII} & \psi \sin 2\varrho\beta - \mu \varrho \sin 2\beta & \psi \cos 2\varrho\beta + (\mu - 2) \cos 2\beta \end{array} \quad (92)$$

führt. Die Ausrechnung liefert

$$\vartheta_{20} = \varrho(\psi + 2\mu - \mu^2) + \varrho(\mu - 2 - \mu\psi) \cos 2\beta \cos 2\varrho\beta + (\varrho^2\mu + 2\psi - \mu\psi) \sin 2\beta \sin 2\varrho\beta \quad (93).$$

Für Gl. (90) ist die Umformung

$$(B_1) - \varrho(A_1) = (B_1^*), \quad (D_1) - \psi(C_1) = (D_1^*) \quad (94)$$

vorteilhaft. Dann folgt die zweireihige Form:

$$\vartheta_{21} = \begin{array}{c|cc} & (B_1^*) & (D_1^*) \\ \hline \text{V} & -\varrho \cos \varrho\beta_1 + \varrho \cos \beta_1 & -\varrho \sin \varrho\beta_1 + \psi \sin \beta_1 \\ \text{VI} & \psi \sin \varrho\beta_1 - \varrho \sin \beta_1 & \psi \cos \varrho\beta_1 - \psi \cos \beta_1 \end{array} \quad (95)$$

mit der Lösung

$$\vartheta_{21} = 2\varrho\psi(-1 + \cos \beta_1 \cos \varrho\beta_1) - (\varrho^2 + \psi^2) \sin \beta_1 \sin \varrho\beta_1 \quad (96).$$

Damit sind alle auftretenden Größen bestimmt. Man erkennt, daß ϑ_{01} und ebenso ϑ_{21} bis auf das Vorzeichen bei der zwei- und dreischichtigen Platte übereinstimmen. Bei ϑ_{21} kann durch Einführung des halben Argumentes eine Zerlegung in zwei Faktoren erzielt werden:

$$\left. \begin{aligned} & 2\varrho\psi(1 - \cos \beta_1 \cos \varrho\beta_1) + (\varrho^2 + \psi^2) \sin \beta_1 \sin \varrho\beta_1 \\ & = 4 \left(\psi \sin \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\varrho\beta_1}{2} - \varrho \cos \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\varrho\beta_1}{2} \right) \cdot \left(\psi \cos \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\varrho\beta_1}{2} - \varrho \sin \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\varrho\beta_1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (97).$$

Der zweite Faktor stellt dieselbe Funktion dar, die bereits beim gegensymmetrischen Knickfall der dreischichtigen Platte in ϑ_{00} und ϑ_1 auftrat, während der erste Faktor mit der entsprechenden Funktion bei symmetrischer Knickverformung identisch ist (Vertauschung von \sin mit \cos). Dadurch lassen sich die im Endergebnis vorkommenden Funktionen auf die folgenden fünf Basisfunktionen reduzieren:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\beta) &= \sin \beta \cos \varrho \beta - \frac{\psi}{\varrho} \cos \beta \sin \varrho \beta, \\ \Phi_2(\beta) &= \cos \beta \sin \varrho \beta - \frac{\psi}{\varrho} \sin \beta \cos \varrho \beta, \\ \Phi_3(\beta) &= (2 - \mu) \cos \beta \sin \varrho \beta - \mu \varrho \sin \beta \cos \varrho \beta, \\ \Phi_4(\beta) &= (2 - \mu) \sin \beta \cos \varrho \beta - \mu \varrho \cos \beta \sin \varrho \beta, \\ \Phi_5(\beta) &= \left(\frac{\psi}{\varrho} (\mu - 2) - \mu \varrho \right) \sin 2\beta \sin 2\varrho \beta + \mu^2 - 2\mu - \psi \\ &\quad + (\mu(\psi - 1) + 2) \cos 2\beta \cos 2\varrho \beta \end{aligned} \right\} \quad (98).$$

Nunmehr läßt sich das Stabilitätskriterium auf übersichtliche Weise darstellen. Wird noch bei der dreischichtigen Platte durch $(-\varrho^2)$, bei der zweischichtigen durch $4\varrho^3$ dividiert, so kann das Endergebnis in folgender Form geschrieben werden:

Stabilitätskriterium der druckbeanspruchten Verbundplatte

A. Dreischichtige Platte mit gegensymmetrischer Verformung:

$$\left. \begin{aligned} (1 - H) \Phi_1(\beta) \Phi_5\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + H(\mu - 1)(\mu + \psi - 2) \Phi_1(\beta + \beta_1) \\ + H(H - 1) 4 \Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right) \Phi_2\left(\frac{\beta_1}{2}\right) \Phi_3(\beta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (99).$$

B. Dreischichtige Platte mit symmetrischer Verformung:

$$\left. \begin{aligned} (1 - H) \Phi_2(\beta) \Phi_5\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + H(\mu - 1)(\mu + \psi - 2) \Phi_2(\beta + \beta_1) \\ + H(H - 1) 4 \Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right) \Phi_2\left(\frac{\beta_1}{2}\right) \Phi_4(\beta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (100).$$

C. Zweischichtige Platte:

$$\left. \begin{aligned} (1 - H) \Phi_1(\beta) \Phi_2(\beta) \Phi_5\left(\frac{\beta_1}{2}\right) + H(\mu - 1)(\mu + \psi - 2) \Phi_1\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right) \Phi_2\left(\beta + \frac{\beta_1}{2}\right) \\ + H(H - 1) \Phi_1\left(\frac{\beta_1}{2}\right) \Phi_2\left(\frac{\beta_1}{2}\right) \Phi_5(\beta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (101).$$

Wie erwähnt, entsteht Fall B aus Fall A durch Vertauschung von $\sin \beta$ mit $\cos \beta$ und $\sin \varrho \beta$ mit $\cos \varrho \beta$. Man erkennt leicht aus der Darstellung, daß in den drei Extremfällen $H = 0; 1; \infty$ stets die gleichen Funktionen nämlich Φ_1 und Φ_2 , das Endergebnis beherrschen: Für $H = 0$ (Stützstoff trägt allein) mit dem Argument β , für $H = 1$ (Platte aus einheitlichem Werkstoff) mit dem Argument $(\beta + \beta_1)$ bzw. $(\beta + \beta_1/2)$, für $H = \infty$ (Außenschicht trägt allein) mit dem Argument $\beta_1/2$. Andererseits ist ersichtlich, wie die Stabilitätsbedingung der zweischichtigen Platte bei Vertauschung der Schichten, d. h. Vertauschung von H mit $\frac{1}{H}$ und β mit $\frac{\beta_1}{2}$ in sich selbst übergeht, was schon anschauungsmäßig zu fordern ist. Auch diese Tatsache zeigt — ebenso wie andere Kontrollen —, daß die gewonnene Lösung in der Tat für beliebige Schichtdicken gilt.

Teil II folgt im nächsten Heft dieser Zeitschrift.

Eingegangen am 20. November 1951.

Das Problem der Jungfernquelle^{*)}

Von H. Wendt in Bonn

Es sei ein unendlich ausgebreitetes und unendlich tiefes Meer gegeben, das unter der Wirkung der Schwerkraft steht. Unterhalb der Meeresoberfläche befindet sich im endlichen Abstände $h > 0$ eine räumliche Quelle, die nach allen Richtungen gleichmäßig stationär pro Sekunde die Wassermenge e erzeugt. Im Unendlichen bleibt dabei das Meer in Ruhe. Es wird nach der Gestalt der Meeresoberfläche gefragt, wenn die Strömung stationär, inkompressibel, reibungs- und wirbelfrei vorausgesetzt wird.

The gravity is acting upon an ocean of infinite width and length, and a spherical source is situated at the finite distance $h > 0$ below the surface, steadily producing water of the amount e per second. At infinity, the ocean is still, and the liquid is incompressible and free of viscosity. Questioned is the form of the surface, if the flow is stationary and irrotational.

Supposons une mer étendue à l'infini et de profondeur infinie, exposée à l'influence de la pesanteur! Au-dessous de la surface de la mer à la distance limitée $h > 0$, se trouve dans l'espace une source, qui produit la quantité d'eau en toutes directions également et stationnairement par seconde. Dans l'infini la mer reste en repos pendant ce procédé. Il est question de la forme de la surface de la mer au cas que le courant est supposé d'être stationnaire, incompressible, sans friction et sans tourbillons.

Пусть имеем бесконечно простирающееся и бесконечно глубокое море, находящееся под действием силы тяжести. Под морской поверхностью задан на конечном расстоянии $h > 0$ пространственный источник, производящий равномерно по всем направлениям и стационарно в секунду количество воды. При этом, на бесконечности море остается в покое. Спрашивается, какова фигура морской поверхности, если течение предполагается, стационарным, несжимаемым и свободным от трения и вихрей.

1. Mathematische Formulierung

Das oben formulierte Problem ist rotationssymmetrisch. Wir brauchen die Strömung nur in einem Vertikalschnitt, der die Quelle enthält, zu betrachten. Diese Ebene beziehen wir auf ein rechtwinkliges kartesisches rz -Koordinatensystem. Sehen wir einen Augenblick von der Quelle ab (Ergiebigkeit $e = 0$), so haben wir ein ruhendes Meer vor uns, dessen Oberfläche mit der r -Achse des Koordinatensystems zusammenfallen möge. Hat die Quelle die Ergiebigkeit $e \neq 0$, so soll die z -Koordinate der Meeresoberfläche für $r \rightarrow \pm \infty$ nach Null streben. Die z -Achse weise aus dem Meere heraus. Ohne die Fragestellung einzuschränken, können wir die Quelle der Ergiebigkeit e im Punkte Q ($r = 0, z = -1$) der negativen z -Achse anbringen (Bild 1).

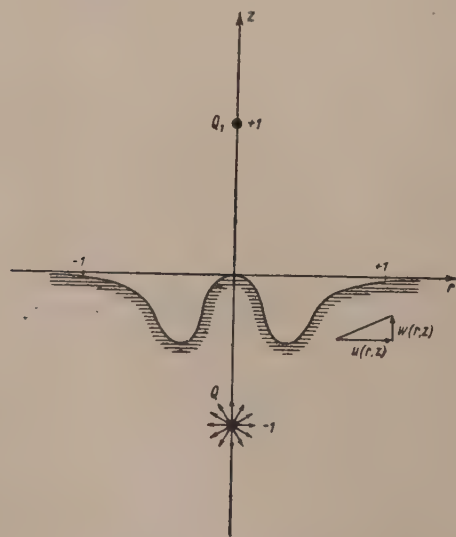


Bild 1. rz -Koordinatensystem

Die Geschwindigkeitskomponenten eines Wasserteilchens parallel zur r - bzw. z -Achse bezeichnen wir mit $u = u(r, z)$ bzw. $w = w(r, z)$. u und w lassen sich nun sowohl mittels des Geschwindigkeitspotentials $\varphi(r, z)$ als auch durch die Stromfunktion $\psi(r, z)$ darstellen:

$$u(r, z) = \varphi_r = -\frac{1}{r} \psi_z, \quad w(r, z) = \varphi_z = \frac{1}{r} \psi_r \quad (1).$$

Eliminiert man φ aus diesen Gleichungen, so gewinnt man die Differentialgleichung für die Stromfunktion

$$\frac{1}{r} \psi_{zz} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \psi_r \right) \quad (2).$$

oder

$$\psi_{rr} - \frac{1}{r} \psi_r + \psi_{zz} = 0 \quad (2a).$$

Wir vermerken noch die Bedingung, daß das Meer im Unendlichen ruht:

$$u = w = 0 \quad (\text{gültig im Unendlichen}) \quad (3).$$

Die Meeresoberfläche ist zugleich eine Stromfläche und eine freie Oberfläche. Auf ihr hat also die Stromfunktion $\psi(r, z)$ in allen Punkten einen festen Wert, den wir gleich Null setzen. Bezeichnen wir die Ordinaten der Punkte der Meeresoberfläche in der rz -Ebene mit z_M , so lautet ihre Gleichung:

$$\psi(r, z_M) = 0 \quad (4).$$

^{*)} Die Arbeit ist angeregt durch eine Naturerscheinung in der Sächsischen Schweiz, auf die mich Herr C. Weber aufmerksam machte.

¹⁾ Wir bezeichnen gelegentlich partielle Ableitungen nach r und z durch Indizes.

Von dieser Gleichung setzen wir voraus, daß sie nach z_M auflösbar ist:

$$z_M = f(r) \quad (\text{Gleichung der Meeresoberfläche}) \quad \dots \quad (4a).$$

Weiter ist auf der freien Meeresoberfläche der Druck $p = p(r, z)$ in allen Punkten gleich dem Drucke $p_0 = \text{const}$ der auf ihr lastenden Atmosphäre. Der Druck läßt sich durch die B e r n o u l l i s c h e Gleichung bestimmen. Bei Anwesenheit einer äußeren Kraft $\mathfrak{K}(r, z)$ (pro Volumeneinheit), die ein Potential $P(r, z)$ besitzt:

$$\mathfrak{K} = -\text{grad } P$$

hat diese die Gestalt:

$$p + \frac{\rho}{2}(u^2 + w^2) + P(r, z) = E \quad \dots \quad (5).$$

Mit ρ wurde die Dichte bezeichnet. ρ und E sind Konstante.

Bei unserem Problem wirkt auf alle Wasserteilchen die Schwerkraft in Richtung der negativen z -Achse. Das Potential lautet also $P = \rho g z$, wo $g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$ die Erdbeschleunigung bedeutet. Damit wird aus (5) die Gleichung

$$p + \frac{\rho}{2}(u^2 + w^2) + \rho g z = E \quad \dots \quad (6).$$

Zur Ermittlung der Konstanten E gehen wir auf der freien Meeresoberfläche ($p = p_0$) ins Unendliche. Wegen

$$u(r, z_M) = 0, \quad w(r, z_M) = 0, \quad z_M = 0, \quad p = p_0 \quad (\text{gültig im Unendlichen der Meeresoberfläche}) \quad (7)$$

findet man sofort:

$$E = p_0.$$

Damit hat man als Gleichung, der alle Punkte der freien Meeresoberfläche genügen müssen:

$$[u(r, z_M)]^2 + [w(r, z_M)]^2 = -2 g z_M \quad (\text{gültig auf der Meeresoberfläche}). \quad \dots \quad (8).$$

Da die linke Seite von (8) eine Summe von Quadraten ist, so folgt, daß die Punkte $z > 0$ außerhalb der Meeresströmung liegen. Insbesondere befindet sich also der Punkt Q_1 ($r = 0, z = 1$) außerhalb des Meeres.

Weiter lehrt uns die Gleichung (8), daß der Punkt $r = 0, z = 0$ der Meeresoberfläche angehört. Aus der Symmetrie der Strömung folgt nämlich, daß die innerhalb des Meeres liegende z -Achse eine Stromlinie ist. Schreiten wir vom Quellpunkt Q in Richtung wachsender z -Werte auf ihr aufwärts, so durchstoßen wir die Meeresoberfläche in einem Staupunkt ($u = w = 0$). In diesem Punkte muß nach (8) notwendig $z = 0$ sein.

Mittels der Gleichungen (1) bis (8) können wir das am Anfange der Arbeit gestellte Problem mathematisch formulieren.

Die durch die Quelle in Q erzeugte Meeresströmung ist durch eine Stromfunktion $\psi(r, z)$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

- I. Innerhalb des Meeres mit Ausnahme des Punktes $Q(0, -1)$ genügt $\psi(r, z)$ der Differentialgleichung (2).
- II. Im Punkte Q zeigt $\psi(r, z)$ die Singularität der Quelle der Ergiebigkeit e .
- III. $\psi(r, z)$ erfüllt im Unendlichen die Bedingung (3), d.h. das Meer ruht im Unendlichen.
- IV. Die Meeresoberfläche $z_M = f(r)$ hat für $r \rightarrow \pm \infty$ die r -Achse zur Asymptote.
- V. Die Meeresoberfläche ist eine Stromfläche. Ihre Punkte erfüllen die Gleichung (4).
- VI. Die Meeresoberfläche ist eine freie Oberfläche. Ihre Punkte erfüllen die B e r n o u l l i s c h e Gleichung (8).

2. Die Funktionen $\Omega_Q, \Omega^{(n)}, \omega_n$

Ehe wir das Lösungsverfahren für das Problem der Jungfernquelle darstellen, wollen wir uns einen ersten Überblick über die Funktionen verschaffen, die im folgenden immer wieder auftreten.

a) Die Funktion $\Omega_Q(r, z)$:

Wir betrachten zunächst die Funktion

$$\Omega_Q(r, z) = \frac{1+z}{[r^2 + (1+z)^2]^{1/2}} \quad \dots \quad (9).$$

Die im Nenner und auch in sonstigen Ausdrücken auftretenden Wurzeln sollen stets positiv genommen werden. $\Omega_Q(r, z)$ genügt der Differentialgleichung (2). Es ist die Stromfunktion einer im Punkte $Q(0, -1)$ angebrachten Quelle der Ergiebigkeit 4π , die stationär nach allen Richtungen gleichmäßig sprudelt. Im Unendlichen induziert die Quelle keine Geschwindigkeiten.

b) Die Funktionen $\Omega^{(n)}(r, z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$
Ebenso ist

$$\Omega^{(0)}(r, z) = \frac{1-z}{[r^2 + (1-z)^2]^{1/2}} \dots \dots \dots (10)$$

eine Lösung von (2). Es ist die Stromfunktion einer Quelle der Ergiebigkeit 4π im Punkte $Q_1(0, +1)$. $\Omega^{(0)}(r, z)$ geht aus $\Omega_Q(r, z)$ offenbar dadurch hervor, daß man z in $-z$ verwandelt. Man liest aus (2) ab, daß mit $\Omega^{(0)}(r, z)$ auch alle partiellen Differentialquotienten nach z Lösungen von (2) sind. Wir schreiben sie

$$\Omega^{(n)}(r, z) = \frac{\partial^n \Omega^{(0)}(r, z)}{\partial z^n} \quad n = 1, 2, \dots \dots \dots (11).$$

Es sind also z.B.

$$\Omega^{(1)}(r, z) = -\frac{r^2}{[r^2 + (1-z)^2]^{3/2}}, \quad \Omega^{(2)}(r, z) = -\frac{3r^2(1-z)}{[r^2 + (1-z)^2]^{5/2}} \dots \dots \dots (12)$$

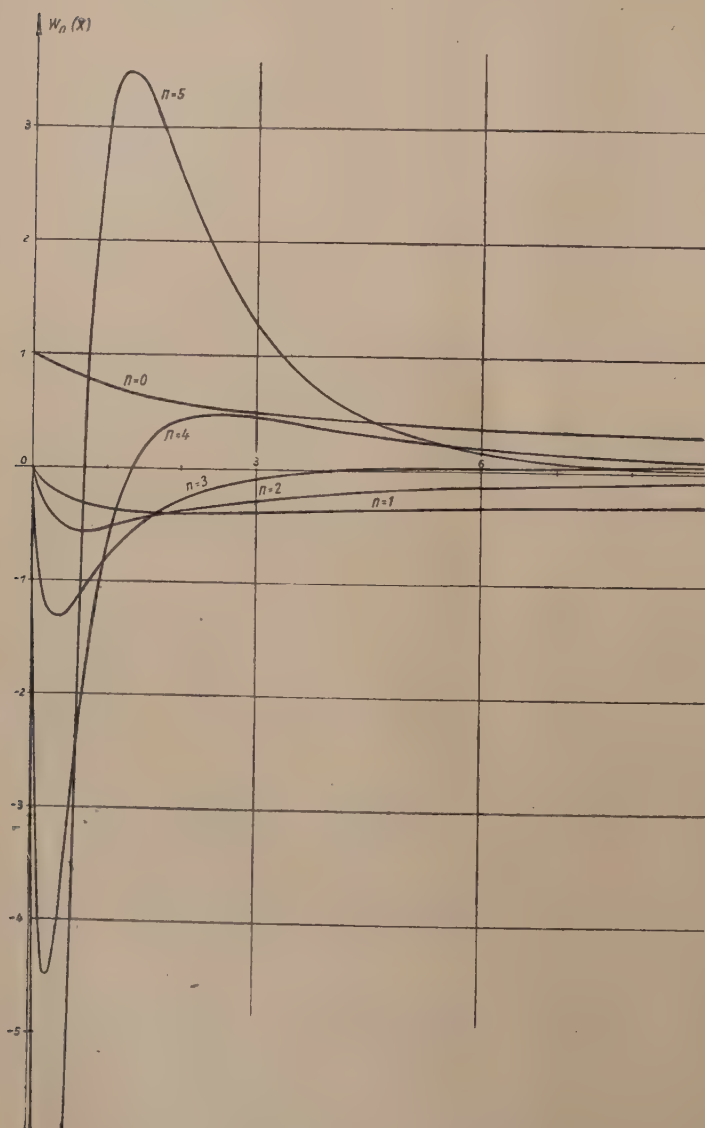


Bild 2. Die Funktionen $w_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

Lösungen von (2).

Die Funktionen $\Omega^{(n)}(r, z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) stellen die Stromfunktionen mehrfacher Quellen in Q_1 dar, die das Unendliche in Ruhe lassen. Sie weisen innerhalb der Meeresströmung keine Singularität auf.

Zu einer Rekursionsformel für die $\Omega^{(n)}(r, z)$ gelangt man, wenn man von der quadrierten Formel (12) für $\Omega^{(1)}$ ausgeht:

$$[r^2 + (1-z)^2]^3 [\Omega^{(1)}(r, z)]^2 = r^4$$

und beide Seiten partiell nach z differenziert:

$$-3(1-z)\Omega^{(1)}(r, z) + [r^2 + (1-z)^2]\Omega^{(2)}(r, z) = 0.$$

Bildet man von dieser Gleichung die n -te partielle Ableitung nach z nach der bekannten Leibnizschen Regel, so entsteht die Rekursionsformel:

$$\left. \begin{aligned} [r^2 + (1-z)^2]\Omega^{(n+2)}(r, z) \\ - (2n+3)(1-z)\Omega^{(n+1)}(r, z) + n(n+2)\Omega^{(n)}(r, z) = 0 \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} (13).$$

Mit $\Omega^{(0)}(r, z)$ und $\Omega^{(1)}(r, z)$ lassen sich damit die $\Omega^{(n)}(r, z)$ für $n = 2, 3, 4, \dots$ successive leicht berechnen.

c) Die Funktionen $w_n(r^2)$:

Für $z = 0$ bezeichnen wir abgekürzt $\Omega^{(n)}(r, 0)$ mit $w_n(r^2)$:

$$w_n(r^2) = \Omega^{(n)}(r, 0) \quad n = 0, 1, 2, \dots \dots \dots (14).$$

Die w_n sind offenbar Funktionen von r^2 . Man hat z. B.:

$$w_0(r^2) = \frac{1}{(1+r^2)^{1/2}}, \quad w_1(r^2) = -\frac{r^2}{(1+r^2)^{3/2}}, \quad w_2(r^2) = -\frac{3r^2}{(1+r^2)^{5/2}} \dots \dots \dots (15).$$

Setzen wir in (13) für z den Wert Null, so erhalten wir die Rekursionsformel der $\omega_n(r^2)$:

$$(1 + r^2) \omega_{n+2}(r^2) - (2n + 3) \omega_{n+1}(r^2) + n(n + 2) \omega_n(r^2) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16).$$

Mit $\omega_0(r^2)$ und $\omega_1(r^2)$ sind damit die Funktionen $\omega_n(r^2)$ ($n = 2, 3, \dots$) leicht berechenbar. Auf Bild 2 ist der Verlauf der $\omega_n(r^2)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ dargestellt.

Aus (15) in Verbindung mit der Rekursionsformel (16) folgen sofort:

Hilfssatz 1: $\lim_{r \rightarrow \pm \infty} \omega_n(r^2) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Hilfssatz 2: Die $\omega_n(r^2)$ ($n = 1, 2, \dots$) gehen mit $r \rightarrow 0$ wie r^2 gegen Null.

Unter Verwendung der $\omega_n(r^2)$ gelten folgende Entwicklungen nach steigenden Potenzen von z [$|z| < \sqrt{1 + r^2}$]:

$$\left. \begin{aligned} \Omega^{(0)}(r, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega_i(r^2)}{i!} z^i = \omega_0(r^2) + \omega_1(r^2) z + \frac{\omega_2(r^2)}{2!} z^2 + \dots \\ \Omega_Q(r, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\omega_i(r^2)}{i!} z^i = \omega_0(r^2) - \omega_1(r^2) z + \frac{\omega_2(r^2)}{2!} z^2 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

$$\Omega_Q(r, z) - \Omega^{(0)}(r, z) = -2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_{2i-1}(r^2)}{(2i-1)!} z^{2i-1} = -2 \left(\omega_1(r^2) z + \frac{\omega_3(r^2)}{3!} z^3 + \dots \right) \quad (17b)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega^{(j)}(r, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega_{i+j}(r^2)}{i!} z^i = \Omega^{(j)}(r, 0) + \omega_{j+1}(r^2) z + \frac{\omega_{j+2}(r^2)}{2!} z^2 + \dots \\ &= \omega_j(r^2) + \omega_{j+1}(r^2) z + \frac{\omega_{j+2}(r^2)}{2!} z^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17c) \\ j = 0, 1, 2, \dots$$

3. Das Näherungsverfahren

Das zu Beginn der Arbeit formulierte Problem der Jungferquelle soll für kleine Quellergiebigkeiten behandelt werden. Seine Lösung soll nicht mit der Hodographenmethode vorgenommen werden. Es wird ein Singularitätenverfahren entwickelt, das innerhalb der Strömungsebene arbeitet. Es gestattet, Näherungen beliebig hoher Ordnungen zu berechnen. Wir setzen dabei voraus, daß die Stromfunktion $\psi = \psi(r, z)$ oder genauer $\psi = \psi(r, z, e)$ sowohl eine Entwicklung nach wachsenden Potenzen von z als auch nach der Ergiebigkeit e (oder $\varepsilon = \frac{e}{4\pi}$)

der Quelle gestattet. Von den auftretenden unendlichen Reihen wird angenommen, daß man mit ihnen wie mit Polynomen rechnen darf. Auf Konvergenzfragen soll nicht eingegangen werden.

a) Die nullte Näherung:

Um einen ersten Schritt für das Näherungsverfahren zu gewinnen, setzen wir die Ergiebigkeit e der Quelle in Q gleich Null. Dann ist

$$\psi^{(0)}(r, z) = 0 \quad (18),$$

die nullte Näherung für die Stromfunktion. Die nullte Näherung für die freie Meeresoberfläche hat dann die Gleichung:

$$z_M^{(0)} = 0 \quad (19).$$

b) Die erste Näherung:

Wir bringen nun im Punkte $Q(0, -1)$ eine Quelle der Ergiebigkeit $e \neq 0$ an. Damit die Meeresoberfläche (19) der nullten Näherung eine Stromlinie wird, überlagern wir noch die an der r -Achse gespiegelte Quelle. Als erste Näherung $\psi^{(1)}(r, z)$ für die Stromfunktion setzen wir an:

$$\psi^{(1)}(r, z) = \varepsilon [\Omega_Q(r, z) - \Omega^{(0)}(r, z)] \quad (20).$$

Die Funktion $\psi^{(1)}(r, z)$ erfüllt offenbar exakt die Forderungen I, II, III unseres Problems von Seite 339. Bei unserer Wahl von $\psi^{(1)}(r, z)$ ist jedoch nicht mehr zu erwarten, daß $z_M^{(0)} = 0$ auch noch eine freie Oberfläche ist, daß also auf ihr die Bernoullische Gl. (8) gilt. Um (8) zu kontrollieren, berechnen wir für die erste Näherung (20) die Geschwindigkeitskomponenten, die wir mit $u^{(1)}(r, z)$ und $w^{(1)}(r, z)$ bezeichnen. Wegen (17b) findet man

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r, z) &= -\frac{1}{r} \psi_z^{(1)} = 2\varepsilon \frac{\omega_1(r^2)}{r} + O(\varepsilon z^2)^3 \\ w^{(1)}(r, z) &= \frac{1}{r} \psi_r^{(1)} = O(\varepsilon z). \end{aligned}$$

²⁾ Das Konvergenzgebiet ist am Einfachsten aus 4. zu ersehen.

³⁾ Unter dem Symbol $O(x^m)$ sollen Größen verstanden werden, die mit dem Faktor x^m oder einer höheren Potenz von x behaftet sind.

Mit den Ausdrücken für $u^{(1)}$ und $w^{(1)}$ gehen wir in die linke Seite der Bernoulli'schen Gl. (8) ein:

$$[u^{(1)}(r, z_M)]^2 + [w^{(1)}(r, z_M)]^2 = -2g z_M.$$

Man findet

$$4\varepsilon^2 \left(\frac{\omega_1(r^2)}{r} \right)^2 + O(\varepsilon^2 z_M^3) = -2g z_M \quad (21).$$

Wir sehen, daß die nullte Näherung für die Meeresoberfläche $z = z_M^{(0)} = 0$ dieser Gleichung genügt, wenn man von Größen in ε^2 und höheren Potenzen von ε absieht.

Ersetzen wir z_M in (21) durch

$$z_M^{(1)} = -\frac{2\varepsilon^2}{g} \left(\frac{\omega_1(r^2)}{r} \right)^2 \quad (22),$$

so wird diese Gleichung genauer erfüllt, als es bei der nullten Näherung der Fall war. Der Ausdruck (22) genügt (21), wenn man Terme in ε^4 und höhere Potenzen von ε vernachlässigt.

Die Gl. (22) definiert die erste Näherung für die Meeresoberfläche. Wegen Hilfssatz 1 ist die Forderung IV exakt erfüllt. Man rechnet leicht nach, daß man (22) auch schreiben kann:

$$z_M^{(1)} = \frac{2\varepsilon^2}{g} \omega_1(r^2) \{ \omega_1(r^2) + \omega_0(r^2) \} = q_2(r^2) \varepsilon^2 \quad (22a).$$

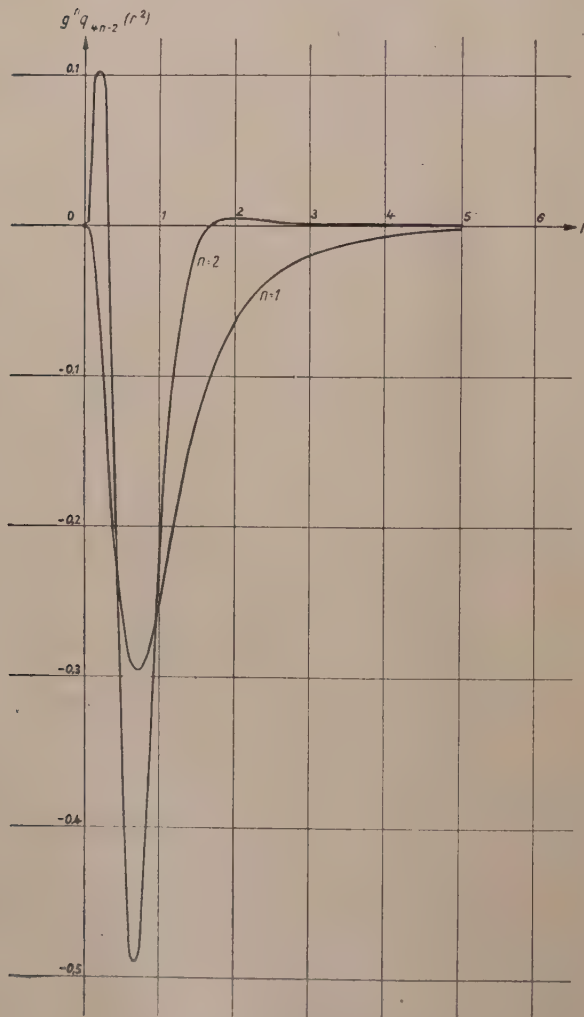


Bild 3. Die Funktionen $g q_2(r^2)$ und $g q_1(r^2)$ der ersten und zweiten Näherung der Meeresoberfläche ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$)

Die Funktion $g q_2(r^2) = -\frac{2r^2}{(1+r^2)^3}$ zeigt Bild 3.

c) Die zweite Näherung:

Die erste Näherung (20) und (22) unseres Problems enthält das erste Glied der Entwicklung der Stromfunktion und der Gleichung der Meeresoberfläche nach Potenzen der Ergiebigkeit

Vermerkt werde noch die aus (20), (22) und (17b) fließende Beziehung:

$$\psi^{(1)}(r, z_M^{(1)}) = O(\varepsilon^3) \quad (23).$$

Wir fassen die Eigenschaften der ersten Näherung zusammen:

Die durch (20) und (22) definierte erste Näherung für die Stromfunktion $\psi^{(1)}(r, z)$ und die Meeresoberfläche $z_M^{(1)}$ erfüllt die Forderungen I bis IV exakt.

V⁽¹⁾: Die Gleichung

$$\psi^{(1)}(r, z_M^{(1)}) = 0$$

ist erfüllt, wenn man alle Glieder vernachlässigt, die mit Potenzen $\varepsilon^3, \varepsilon^5, \dots$ behaftet sind. (Dies folgt sofort aus (23)).

VI⁽¹⁾: Berechnet man die Geschwindigkeiten

$$u^{(1)}(r, z) = -\frac{1}{r} \psi_z^{(1)}(r, z),$$

$$w^{(1)}(r, z) = \frac{1}{r} \psi_r^{(1)}(r, z),$$

so wird die Bernoulli'sche Gleichung

$$[u^{(1)}(r, z_M^{(1)})]^2 + [w^{(1)}(r, z_M^{(1)})]^2 = -2g z_M^{(1)}$$

erfüllt, wenn man alle Glieder in $\varepsilon^4, \varepsilon^6, \dots$ vernachlässigt.

In den Koordinaten r und z lauten die Gleichungen für die erste Näherung

$$\psi^{(1)}(r, z) = \varepsilon \left\{ \frac{1+z}{[r^2 + (1+z)^2]^{1/2}} - \frac{1-z}{[r^2 + (1-z)^2]^{1/2}} \right\} \quad (20b),$$

$$z_M^{(1)} = -\frac{2r^2}{(1+r^2)^3} \frac{\varepsilon^2}{g} \quad (22b).$$

$e = 4\pi\varepsilon$. Bei der zweiten Näherung kommen die zweiten Summanden dieser Entwicklung dazu. Die Stromfunktion $\psi(r, z, \varepsilon)$ unseres Problems wird aus Symmetriegründen nur ungerade Potenzen von ε enthalten, die Gleichung der Meeresoberfläche nur gerade Potenzen von ε . Wir setzen daher als zweite Näherung an:

$$\psi^{(2)}(r, z) = \psi^{(1)}(r, z) + L_4(r, z) \varepsilon^3 \quad (24),$$

$$z_M^{(2)} = z_M^{(1)} + q_6(r^2) \varepsilon^4 \quad (25).$$

Die zunächst noch freien Funktionen $L_4(r, z)$ und $q_6(r^2)$ werden durch Forderungen an die Stromfunktion $\psi^{(2)}(r, z)$ und die Gleichung der Meeresoberfläche festgelegt. Die Stromfunktion $\psi^{(2)}(r, z)$ wollen wir so bestimmen, daß die Forderungen I, II, III von Seite 339 exakt befriedigt werden. Die Gl. (25) der Meeresoberfläche soll streng der Forderung IV genügen. Die Bedingung V und VI sollen dagegen nur näherungsweise erfüllt werden, aber genauer, als es bei der ersten Näherung der Fall war. Anschließend an die Eigenschaften V⁽¹⁾ und VI⁽¹⁾ der ersten Näherung verlangen wir:

V⁽²⁾: Die Gleichung

$$\psi^{(2)}(r, z_M^{(2)}) = 0$$

ist richtig, wenn man alle Glieder vernachlässigt die mit Potenzen $\varepsilon^5, \varepsilon^7, \dots$ behaftet sind.

VI⁽²⁾: Berechnet man die Geschwindigkeiten

$$u^{(2)}(r, z) = -\frac{1}{r} \psi_z^{(2)}(r, z), \quad w^{(2)}(r, z) = \frac{1}{r} \psi_r^{(2)}(r, z),$$

so wird die Bernoullische Gleichung

$$[u^{(2)}(r, z_M^{(2)})]^2 + [w^{(2)}(r, z_M^{(2)})]^2 = -2g z_M^{(2)}$$

erfüllt, wenn man alle Glieder in $\varepsilon^6, \varepsilon^8, \dots$ wegläßt.

Wir wenden uns zunächst der Konstruktion von $L_4(r, z)$ zu. Dazu gehen wir von der Forderung V⁽²⁾ aus. Wegen (24), (25), (20), (22) und (17b) erhält man für $\psi^{(2)}(r, z_M^{(2)}) = 0$ die Entwicklung

$$\left\{ \frac{4}{g} \frac{\omega_1^3(r^2)}{r^2} + L_4(r, 0) \right\} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^5) = 0.$$

Führt man die in V⁽²⁾ angegebenen Vernachlässigungen aus, so ergibt sich als Bestimmungsgleichung für $L_4(r, 0)$:

$$L_4(r, 0) = -\frac{4}{g} \frac{\omega_1^3(r^2)}{r^2} \quad (26).$$

Man kann nun leicht nachrechnen, daß sich $\frac{\omega_1^3(r^2)}{r^2}$ in der folgenden Weise als Linearform der $\omega_2(r^2), \omega_3(r^2), \omega_4(r^2)$ schreiben läßt:

$$\frac{\omega_1^3(r^2)}{r^2} = \frac{1}{105} [4\omega_2(r^2) + 4\omega_3(r^2) - \omega_4(r^2)] \quad (27).$$

Damit hat man

$$L_4(r, 0) = \frac{4}{105g} [-4\omega_2(r^2) - 4\omega_3(r^2) + \omega_4(r^2)] \quad (28).$$

Die durch (24) definierte Stromfunktion $\psi^{(2)}(r, z)$ soll die Forderungen I, II, III exakt erfüllen. Die Funktion $L_4(r, z)$ muß dann eine Lösung der Differentialgleichung (2) sein, die im Strömungsgebiet ($z \leq 0$) keine Singularitäten aufweist. Weiter muß sie längs der r -Achse der Randbedingung (28) genügen. Dies leistet offenbar die Funktion:

$$L_4(r, z) = \frac{4}{105g} [-4\Omega^{(2)}(r, z) - 4\Omega^{(3)}(r, z) + \Omega^{(4)}(r, z)]$$

Die Summanden der rechten Seite sind nach früherem Lösungen von (2). Sie besitzen eine Singularität im Punkte Q_1 , der außerhalb des Meeres liegt. Für $z = 0$ geht wegen (14) die Gleichung (28) hervor. Nach einem bekannten Satze aus der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen ist $L_4(r, z)$ eindeutig bestimmt.

⁴⁾ Wegen der Indizes bei den Funktionen $L(r, z)$ und $q(r^2)$ s. (58) und (55).

⁵⁾ Siehe Hilfssatz 4, S. 350.

Damit lautet die zweite Näherung für die Stromfunktion:

$$\psi^{(2)}(r, z) = \varepsilon [\Omega_Q(r, z) - \Omega^{(0)}(r, z)] + \frac{4\varepsilon^3}{105g} [-4\Omega^{(2)}(r, z) - 4\Omega^{(3)}(r, z) + \Omega^{(4)}(r, z)] \quad (29).$$

Sie erfüllt die Forderungen I bis III exakt.

Wir behandeln nunmehr die Forderung VI⁽²⁾. Die Berechnung der Geschwindigkeiten

$$u^{(2)}(r, z) = -\frac{1}{r} \psi_z^{(2)}(r, z), \quad w^{(2)}(r, z) = \frac{1}{r} \psi_r^{(2)}(r, z)$$

ergibt

$$u^{(2)}(r, z) = 2\varepsilon \frac{\omega_1(r^2)}{r} + \frac{4\varepsilon^3}{105g} \left[\frac{4\omega_3(r^2)}{r} + \frac{4\omega_4(r^2)}{r} - \frac{\omega_5(r^2)}{r} \right] + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^3)$$

$$w^{(2)}(r, z) = O(\varepsilon z) + O(\varepsilon^3).$$

Setzen wir für z den Wert (25) ein, so erhält man für die Bernoulli'sche Gleichung

$$[u^{(2)}(r, z_M^{(2)})]^2 + [w^{(2)}(r, z_M^{(2)})]^2 = -2g z_M^{(2)}$$

die Entwicklung

$$\frac{16\varepsilon^4}{105g} \left[\frac{4\omega_1(r^2)\omega_3(r^2)}{r^2} + \frac{4\omega_1(r^2)\omega_4(r^2)}{r^2} - \frac{\omega_1(r^2)\omega_5(r^2)}{r^2} \right] + O(\varepsilon^6) = -2g q_6(r^2) \varepsilon^4.$$

Auf beiden Seiten haben sich die mit ε^2 multiplizierten Glieder aufgehoben. Vernachlässigen wir die mit $\varepsilon^6, \varepsilon^8, \dots$ behafteten Terme, wie es VI⁽²⁾ verlangt, so bestimmt sich die Zusatzfunktion $q_6(r^2)$ zu

$$q_6(r^2) = -\frac{8\omega_1(r^2)}{105g^2} \left[\frac{4\omega_3(r^2)}{r^2} + \frac{4\omega_4(r^2)}{r^2} - \frac{\omega_5(r^2)}{r^2} \right] \quad (30).$$

Die eckige Klammer läßt sich auch als Linearform der ω_0 bis ω_5 umrechnen ⁶⁾:

$$\frac{4\omega_3(r^2)}{r^2} + \frac{4\omega_4(r^2)}{r^2} - \frac{\omega_5(r^2)}{r^2} = \omega_5(r^2) + 5\omega_4(r^2) + 16\omega_3(r^2) + 40\omega_2(r^2) + 72\omega_1(r^2) + 72\omega_0(r^2).$$

Damit lautet die zweite Näherung für die freie Meeresoberfläche:

$$z_M^{(2)} = q_2(r^2) \varepsilon^2 + q_6(r^2) \varepsilon^4 = 2\omega_1(r^2) \left\{ \omega_1(r^2) + \omega_0(r^2) \right\} \frac{\varepsilon^2}{g} - \frac{8}{105} \omega_1(r^2) [\omega_5(r^2) + 5\omega_4(r^2) + 16\omega_3(r^2) + 40\omega_2(r^2) + 72\omega_1(r^2) + 72\omega_0(r^2)] \left(\frac{\varepsilon^2}{g} \right)^2 \quad (31).$$

Sie erfüllt die Forderungen IV, V⁽²⁾, VI⁽²⁾. In den Koordinaten r und z heißt die zweite Näherung:

$$\psi^{(2)}(r, z) = \varepsilon \left[\frac{1+z}{[r^2 + (1+z)^2]^{1/2}} - \frac{1-z}{[r^2 + (1-z)^2]^{1/2}} \right] + \frac{4\varepsilon^3}{105g} \left[\frac{12r^2(1-z)}{[r^2 + (1-z)^2]^{5/2}} - \frac{12r^4 - 48r^2(1-z)^2}{[r^2 + (1-z)^2]^{7/2}} + \frac{45r^4(1-z) - 60r^2(1-z)^3}{[r^2 + (1-z)^2]^{9/2}} \right] \quad (29a)$$

$$z_M^{(2)} = -\frac{2r^2}{(1+r^2)^3} \frac{\varepsilon^2}{g} + \frac{8}{35} \frac{4r^8 + 67r^6 - 228r^4 + 24r^2}{(1+r^2)^7} \left(\frac{\varepsilon^2}{g} \right)^2 \quad (31a).$$

Die Funktion $g^2 q_6(r^2)$ ist in Bild 3 dargestellt.

d) Die dritte Näherung:

Obwohl klar sein dürfte, wie das Näherungsverfahren weiter läuft, wollen wir noch auf die dritte Näherung eingehen. Ausgehend von der zweiten Näherung (24) und (25) machen wir für die Stromfunktion und die Gleichung der Meeresoberfläche folgenden Ansatz:

$$\psi^{(3)}(r, z) = \psi^{(2)}(r, z) + L_8(r, z) \varepsilon^5 \quad (32),$$

$$z_M^{(3)} = z_M^{(2)} + q_{10}(r^2) \varepsilon^6 \quad (33).$$

Wie bei der zweiten Näherung sollen die noch freien Funktionen $L_8(r, z)$ und $q_{10}(r^2)$ so bestimmt werden, daß die Forderungen I, II, III, IV exakt erfüllt werden. Die Forderungen V und VI sollen besser befriedigt werden, als es bei der zweiten Näherung war. An die Stelle der Bedingungen V⁽²⁾ und VI⁽²⁾ treten:

V⁽³⁾: Die Gleichung

$$\psi^{(3)}(r, z_M^{(3)}) = 0$$

⁶⁾ Vgl. (48), S. 349.

ist erfüllt, wenn man alle Glieder vernachlässigt, die mit Potenzen $\varepsilon^7, \varepsilon^9, \dots$ behaftet sind.

VI⁽³⁾: Berechnet man die Geschwindigkeiten

$$u^{(3)}(r, z) = -\frac{1}{r} \psi_z^{(3)}(r, z), \quad w^{(3)}(r, z) = \frac{1}{r} \psi_r^{(3)}(r, z),$$

so wird die B e r n o u l l i s c h e Gleichung

$$[u^{(3)}(r, z_M^{(3)})]^2 + [w^{(3)}(r, z_M^{(3)})]^2 = -2g z_M^{(3)}$$

erfüllt, wenn man alle Glieder in $\varepsilon^8, \varepsilon^{10}, \dots$ vernachlässigt.

Die Konstruktion der Funktionen $L_8(r, z)$ und $q_{10}(r^2)$ erfolgt in analoger Weise wie bei der zweiten Näherung. Zur Festlegung von $L_8(r, z)$ gehen wir von $V^{(3)}$ aus. Eine einfache Rechnung liefert für $\psi^{(3)}(r, z_M^{(3)}) = 0$:

$$\left[\frac{8}{35g^2} \left\{ \frac{4\omega_1^2(r^2)\omega_3(r^2)}{r^2} + \frac{4\omega_1^2(r^2)\omega_4(r^2)}{r^2} - \frac{\omega_1^2(r^2)\omega_5(r^2)}{r^2} \right\} + L_8(r, 0) \right] \varepsilon^5 + O(\varepsilon^7) = 0.$$

Die Glieder mit ε^3 haben sich wegen (27) aufgehoben. Die in $V^{(3)}$ genannten Vernachlässigungen bestimmen $L_8(r, 0)$ zu:

$$L_8(r, 0) = \frac{8}{35g^2} \left\{ -\frac{4\omega_1^2(r^2)\omega_3(r^2)}{r^2} - \frac{4\omega_1^2(r^2)\omega_4(r^2)}{r^2} + \frac{\omega_1^2(r^2)\omega_5(r^2)}{r^2} \right\} \dots \quad (34).$$

Wie bei der zweiten Näherung, so kann man auch jetzt die Zusatzfunktion $L_8(r, 0)$ als Linearform der $\omega_n(r^2)$ schreiben. Es gelten nämlich die folgenden Identitäten⁵⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_1^2(r^2)\omega_3(r^2)}{r^2} &= \frac{8}{165}\omega_2(r^2) + \frac{8}{165}\omega_3(r^2) + \frac{8}{385}\omega_4(r^2) + \frac{16}{3465}\omega_5(r^2) - \frac{1}{693}\omega_6(r^2) \\ \frac{\omega_1^2(r^2)\omega_4(r^2)}{r^2} &= \frac{200}{3003}\omega_2(r^2) + \frac{200}{3003}\omega_3(r^2) + \frac{112}{3003}\omega_4(r^2) + \frac{136}{9009}\omega_5(r^2) + \frac{25}{9009}\omega_6(r^2) - \\ &\quad - \frac{1}{1287}\omega_7(r^2) \\ \frac{\omega_1^2(r^2)\omega_5(r^2)}{r^2} &= \frac{64}{1001}\omega_2(r^2) + \frac{64}{1001}\omega_3(r^2) + \frac{8}{143}\omega_4(r^2) + \frac{8}{231}\omega_5(r^2) + \frac{12}{1001}\omega_6(r^2) + \\ &\quad + \frac{4}{2145}\omega_7(r^2) - \frac{\omega_8(r^2)}{2145} \end{aligned} \right\} \quad (35).$$

Damit wird aus (34):

$$L_8(r, 0) = \frac{8}{35g^2} \left[-\frac{1984}{5005}\omega_2(r^2) - \frac{1984}{5005}\omega_3(r^2) - \frac{2648}{15015}\omega_4(r^2) - \frac{664}{15015}\omega_5(r^2) + \right. \\ \left. + \frac{20}{3003}\omega_6(r^2) + \frac{32}{6435}\omega_7(r^2) - \frac{1}{2145}\omega_8(r^2) \right] \dots \quad (36).$$

Genau wie bei der zweiten Näherung kann man auf die genaue Gestalt von $L_8(r, z)$ schließen:

$$L_8(r, z) = \frac{8}{35g^2} \left[-\frac{1984}{5005} \{ \Omega^{(2)}(r, z) + \Omega^{(3)}(r, z) \} - \frac{2648}{15015} \Omega^{(4)}(r, z) - \frac{664}{15015} \Omega^{(5)}(r, z) \right. \\ \left. + \frac{20}{3003} \Omega^{(6)}(r, z) + \frac{32}{6435} \Omega^{(7)}(r, z) - \frac{1}{2145} \Omega^{(8)}(r, z) \right] \dots \quad (37).$$

Wir erkennen, daß $L_8(r, z)$ eine Lösung von (2) ist, die keine Singularitäten im Strömungsgebiet besitzt. Die Stromfunktion $\psi^{(3)}(r, z)$ ist damit bestimmt. Sie erfüllt die Forderungen I, II, III unseres Problems exakt.

Zur Ermittlung des Zusatzgliedes $q_{10}(r^2)$ in (33) stellen wir die Bedingung VI⁽³⁾ auf. Man findet für die Geschwindigkeiten:

$$u^{(3)}(r, z) = -\frac{1}{r} \psi_z^{(3)}(r, z) = 2\varepsilon \frac{\omega_1(r^2)}{r} + \frac{4}{105g} \frac{\varepsilon^3}{r} [4\omega_3(r^2) + 4\omega_4(r^2) - \omega_5(r^2)] \\ + \frac{\omega_3(r^2)}{r} \varepsilon z^2 + \frac{4}{105g} \frac{\varepsilon^3 z}{r} [4\omega_4(r^2) + 4\omega_5(r^2) - \omega_6(r^2)] \\ + \frac{8}{35g^2} \frac{\varepsilon^5}{r} \left[\frac{1984}{5005} \{ \omega_3(r^2) + \omega_4(r^2) \} + \frac{2648}{15015} \omega_5(r^2) + \frac{664}{15015} \omega_6(r^2) \right. \\ \left. - \frac{20}{3003} \omega_7(r^2) - \frac{32}{6435} \omega_8(r^2) + \frac{1}{2145} \omega_8(r^2) \right] + O(\varepsilon z^4) + O(\varepsilon^3 z^2) + O(\varepsilon^5 z)$$

$$w^{(3)}(r, z) = \frac{1}{r} \psi^{(3)}(r, z) = -\frac{2\varepsilon}{r} \frac{d\omega_1(r^2)}{dr} z + \frac{4\varepsilon^3}{105g} \left[-\frac{4}{r} \frac{d\omega_2(r^2)}{dr} - \frac{4}{r} \frac{d\omega_3(r^2)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_4(r^2)}{dr} \right] \\ + O(\varepsilon z^3) + O(\varepsilon^3 z) + O(\varepsilon^5).$$

Wir setzen nun

$$z = z_M^{(3)} = q_2(r^2) \varepsilon^2 + q_6(r^2) \varepsilon^4 + q_{10}(r^2) \varepsilon^6$$

ein. Für $q_2(r^2)$ wird der Faktor von ε^2 auf der rechten Seite von (22) benutzt. Für $q_6(r^2)$ verwenden wir den Ausdruck (30).

$$u^{(3)}(r, z_M^{(3)}) = 2\varepsilon \frac{\omega_1'(r^2)}{r} + \frac{4}{105g} \frac{\varepsilon^3}{r} [4\omega_3(r^2) + 4\omega_4(r^2) - \omega_5(r^2)] + \frac{\varepsilon^5}{g^2} \left[\frac{4\omega_1^4(r^2)\omega_3(r^2)}{r^5} \right. \\ \left. - \frac{8}{105} \frac{\omega_1^2(r^2)}{r^3} \{4\omega_4(r^2) + 4\omega_5(r^2) - \omega_6(r^2)\} + \frac{8}{35r} \frac{1984}{15005} (\omega_3(r^2) + \omega_4(r^2)) + \frac{2648}{15015} \omega_5(r^2) \right. \\ \left. + \frac{664}{15015} \omega_6(r^2) - \frac{20}{3003} \omega_7(r^2) - \frac{32}{6435} \omega_8(r^2) + \frac{1}{2145} \omega_9(r^2) \right] + O(\varepsilon^7), \\ w^{(3)}(r, z_M^{(3)}) = \frac{4\varepsilon^3}{g} \left[\frac{\omega_1^2(r^2)}{r^3} \frac{d\omega_1(r^2)}{dr} + \frac{1}{105} \left(-\frac{4}{r} \frac{d\omega_2(r^2)}{dr} - \frac{4}{r} \frac{d\omega_3(r^2)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_4(r^2)}{dr} \right) \right] + O(\varepsilon^5).$$

Die Bernoulli'sche Gleichung der Bedingung VI⁽³⁾ bestimmt dann $q_{10}(r^2)$ zu:

$$q_{10}(r^2) = -\frac{8}{g^3} \left[\frac{1}{(105)^2 r^2} \{4\omega_3(r^2) + 4\omega_4(r^2) - \omega_5(r^2)\}^2 + \frac{\omega_1^5(r^2)\omega_3(r^2)}{r^6} - \frac{2}{105} \frac{\omega_1^3(r^2)}{r^4} \{4\omega_4(r^2) \right. \\ \left. + 4\omega_5(r^2) - \omega_6(r^2)\} + \frac{2}{35} \frac{\omega_1(r^2)}{r^2} \frac{1984}{15005} (\omega_3(r^2) + \omega_4(r^2)) + \frac{2648}{15015} \omega_5(r^2) \right. \\ \left. + \frac{664}{15015} \omega_6(r^2) - \frac{20}{3003} \omega_7(r^2) - \frac{32}{6435} \omega_8(r^2) + \frac{1}{2145} \omega_9(r^2) \right] \\ + \left[\frac{\omega_1^2(r^2)}{r^3} \frac{d\omega_1(r^2)}{dr} + \frac{1}{105} \left(-\frac{4}{r} \frac{d\omega_2(r^2)}{dr} - \frac{4}{r} \frac{d\omega_3(r^2)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\omega_4(r^2)}{dr} \right) \right]^2.$$

Damit ist die dritte Näherung (33) für die Gleichung der freien Meeresoberfläche gefunden. In den Koordinaten r, z lautet sie:

$$g^3 q_{10}(r^2) = \frac{8}{175 \cdot 175} \frac{1}{(1+r^2)^{11}} [11904 r^{16} + 120640 r^{14} + 304256 r^{12} + 43855 r^{10} \\ + 49443515 r^8 - 73667636 r^6 + 13163060 r^4 - 210624 r^2].$$

Bild 4 zeigt den Verlauf von $g^3 q_{10}(r^2)$.

Vergleichen wir die Darstellungen 3 und 4 für $g q_2(r^2)$, $g^2 q_6(r^2)$ und $g^3 q_{10}(r^2)$ so erkennen wir, daß wegen $g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$ die Funktionen $q_{4n+2}(r^2)$ ($n = 0, 1, 2$) mit wachsendem n immer rascher mit der r -Achse zusammenfallen. Für kleine r -Werte zeigen q_2 , q_6 und q_{10} zunächst Schwankungen um die r -Achse mit kleiner werdenden Amplituden. Die hohen r -Potenzen im Nenner von q_2 , q_6 , q_{10} lassen diese Funktionen für größere r -Werte asymptotisch Null werden. Nach Bild 3 ist die r -Achse für $q_2(r^2)$ bzw. $q_6(r^2)$ etwa bei $r = 6$ bzw. $r = 3,25$ erreicht. $q_{10}(r^2)$ fällt mit der r -Achse etwa von $r = 2,5$ ab zusammen. Setzen wir die Konvergenz des Verfahrens voraus, so werden wir vermuten können, daß die Strömung für nicht zu große Quellergiebigkeiten e für etwa $r \geq 3,25$ durch die zweite Näherung gegeben ist. Die dritte Näherung dürfte die Strömung für $r \geq 2,5$ bestimmen.

In den Bildern 5 bis 7 ist die erste bis dritte Näherung der freien Meeresoberfläche für die Quellergiebigkeiten $e \sim 85, 120$ und 170 g sec^{-1} gezeichnet. Im Falle $e \sim 85$ dürfte die gesuchte Meeresoberfläche durch die dritte Näherung bestimmt sein. Für die beiden letzten Fälle sind höhere Näherungen erforderlich, um die bei $r \sim 0,75$ liegende Sogspitze zu erfassen.

4. Gestalt der $\omega_n(r^2)$

Es erhebt sich die Frage, ob das bisher geschilderte Verfahren zur Konstruktion der ersten bis dritten Näherung beliebig fortgesetzt werden kann. Wir werden den Nachweis in 7. durch Induktion erbringen. Zuvor ist es in 4. und 5. nötig, genauer auf die Funktionen $\omega_n(r^2)$ einzugehen.

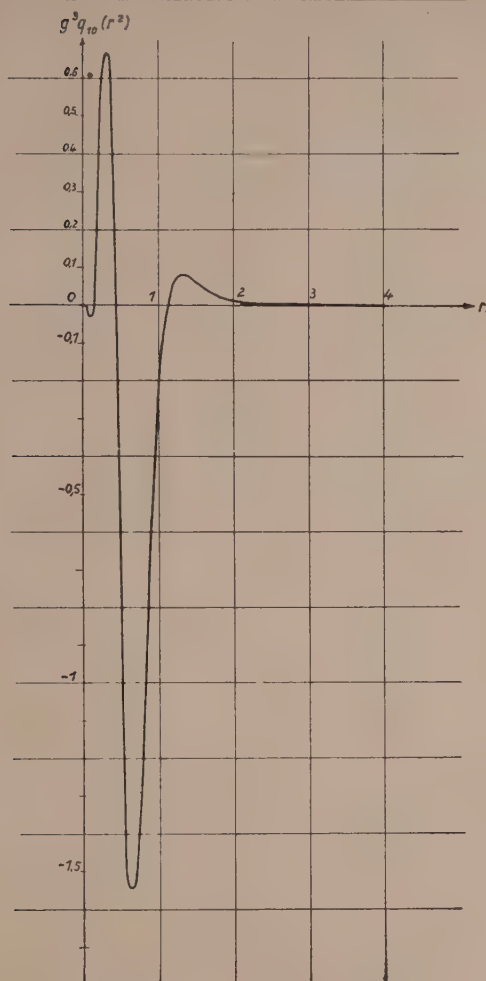


Bild 4. Die Funktion $q_{10}(r^2)$ der dritten Näherung der Meeresoberfläche ($g = 981 \text{ cm/sec}^2$)

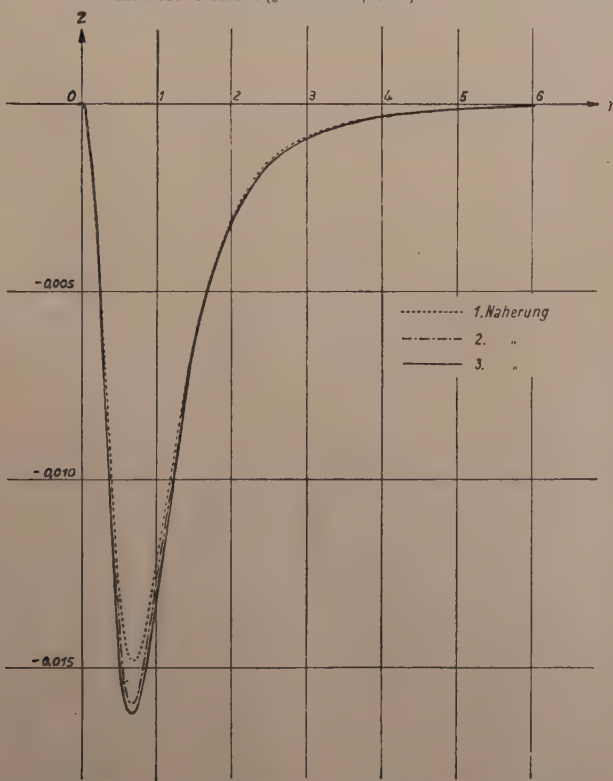


Bild 5. Erste bis dritte Näherung der Meeresoberfläche im Falle $\frac{\varepsilon^2}{g} = 0,05$. Quellergiebigkeit $e \sim 85 \text{ g sec}^{-1}$

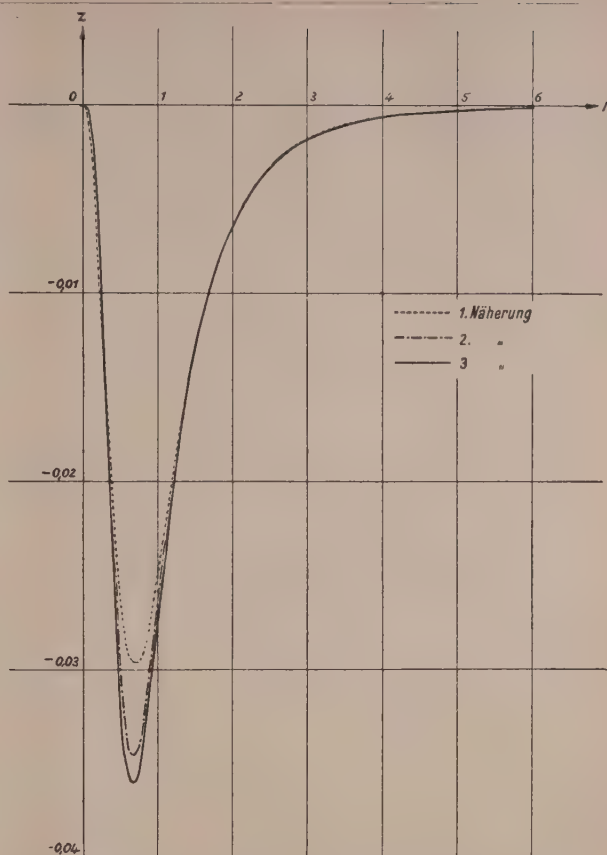


Bild 6. Erste bis dritte Näherung der Meeresoberfläche im Falle $\frac{\varepsilon^2}{g} = 0,1$. Quellergiebigkeit $e \sim 120 \text{ g sec}^{-1}$

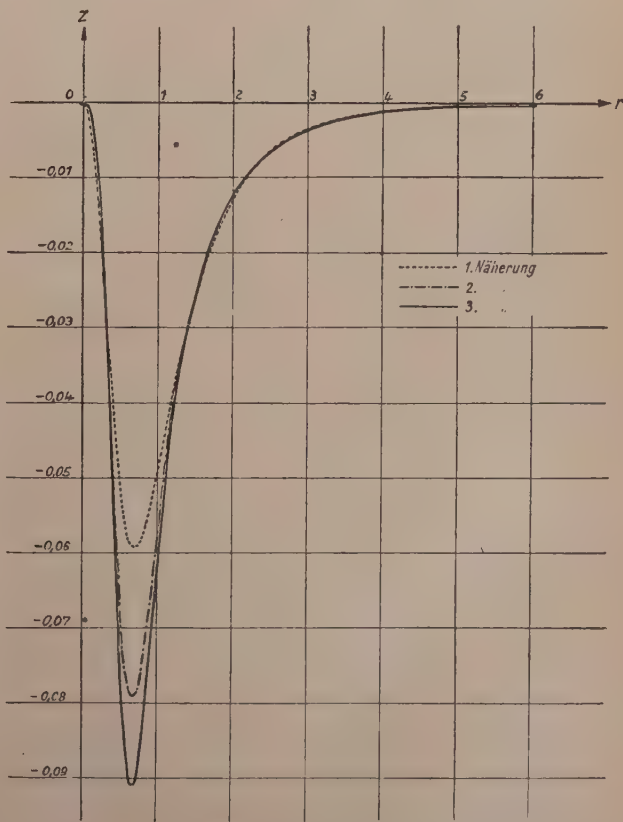


Bild 7. Erste bis dritte Näherung der Meeresoberfläche im Falle $\frac{\varepsilon^2}{g} = 0,2$. Quellergiebigkeit $e \sim 170 \text{ g sec}^{-1}$

Die Funktionen $\omega_n(r^2)$ lassen sich leicht explizit mit Legendreschen Polynomen $P_n(x)$ angeben. Wir entwickeln dazu

$$\Omega^{(0)}(r, z) = \frac{1-z}{[r^2 + (1-z)^2]^{1/2}} = \frac{1-z}{\sqrt{1+r^2}} \left[1 - 2 \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \left(\frac{z}{\sqrt{1+r^2}} \right) + \left(\frac{z}{\sqrt{1+r^2}} \right)^2 \right]^{1/2}$$

nach steigenden Potenzen von $\frac{z}{\sqrt{1+r^2}}$ unter Beachtung der Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n \quad |h| < \min |x \pm \sqrt{x^2-1}|.$$

Setzen wir $P_{-1}(x) \equiv 0$, so findet man:

$$\Omega^{(0)}(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right) - \sqrt{1+r^2} P_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right)}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} z^n.$$

Koeffizientenvergleich mit der Reihenentwicklung für $\Omega^{(0)}(r, z)$ in (17a) ergibt:

$$\omega_n(r^2) = n! \frac{P_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right) - \sqrt{1+r^2} P_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right)}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} \dots \dots \dots (39).$$

Der Definition der $\omega_n(r^2)$ entnimmt man leicht, daß man sie auch in der Form

$$\omega_n(r^2) = \frac{Z_n(r^2)}{(1+r^2)^{\frac{2n+1}{2}}} \dots \dots \dots (40)$$

schreiben kann, wo $Z_n(r^2)$ ein Polynom in r^2 ist. Nach (39) ist dieses Zählerpolynom bestimmt durch

$$Z_n(r^2) = n! (1+r^2)^{\frac{n}{2}} \left[P_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right) - \sqrt{1+r^2} P_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right) \right] \dots \dots \dots (41).$$

Führt man in die rechte Seite die bekannten Entwicklungen für die Legendreschen Polynome ein⁷⁾, so findet man nach etwas mühsamer, völlig elementarer Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} Z_{2m}(r^2) &= \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} Z_{2m}^{(j)}(-1) (1+r^2)^j & m=0, 1, 2, \dots \\ Z_{2m-1}(r^2) &= \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} Z_{2m-1}^{(j)}(-1) (1+r^2)^j & m=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

mit

$$Z_n^{(j)}(-1) = (-1)^j 2^{n-2j} \frac{(n+1)!}{(n-2j+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)_{n-j} \dots \dots \dots (43).$$

Dabei bedeutet hier und später

$$(\alpha)_0 = 1, (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+k-1)$$

α beliebig, k positive ganze Zahl ≥ 1 .

Aus den Formeln (42) und (43) folgt: Die Polynome $Z_n(r^2)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) sind in r^2 vom Grade $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Mit $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ ist die größte ganze Zahl bezeichnet, die $\leq \frac{n+1}{2}$ ist.

Das in (43) erklärte Symbol $Z_n^{(j)}(-1)$ ($j=0, 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$) ist die j -te Ableitung von $Z_n(x) = Z_n^{(0)}(x)$ an der Stelle $x=-1$. Für die höheren Ableitungen gilt:

$$Z_n^{(j)}(-1) = 0 \quad j > \left[\frac{n+1}{2}\right] \dots \dots \dots (43a).$$

⁷⁾ Siehe z. B. Magnus-Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Aufl. (1948), S. 69, 4. und 5. Formel von oben.

5. Spezielle Entwicklungen

Wir benötigen im folgenden die Entwicklung gewisser Klassen von Funktionen nach den ω_n . Zunächst beweisen wir:

$$\frac{2}{(n+1)!} \frac{d\omega_n(x)}{dx} = - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\omega_j(x)}{j!} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (44).$$

Die Berechnung von $\frac{d\omega_n(x)}{dx}$ aus (39) ergibt unter Benutzung der Rekursionsformel der Legendreschen Polynome:

$$\frac{2}{(n+1)!} \frac{d\omega_n(x)}{dx} = - \frac{P_{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)}{(1+x)^{\frac{n+2}{2}}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Bildet man die rechte Seite von (44) mittels (39), so erkennt man die Richtigkeit der Behauptung.

Die Gl. (44) findet in der folgenden Form Verwendung:

$$\frac{1}{r} \frac{d\omega_n(r^2)}{dr} = - (n+1)! \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\omega_j(r^2)}{j!} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (45).$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{(1+x)^{\frac{2n+1}{2}}} = \sum_{j=0}^n \beta_j^n \omega_j(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (46).$$

Die Vorzahlen β_j^n auf der rechten Seite bestimmen sich durch:

$$\beta_j^n = \frac{(j+1)_{2n-2j}}{2^{2n-j} \left(\frac{1}{2}\right)_n (n-j)!} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (47).$$

Insbesondere ist $\beta_0^n = \beta_1^n = 1$, $\beta_n^n = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$ ($n > 0$). Der Beweis erfolgt durch

Induktion. Man überzeugt sich sofort, daß (46) für $n = 0$ gilt. Gilt die Formel für die Zahl n , so differenziere man (46) nach x und setze auf der rechten Seite die Ausdrücke (44) ein.

Wir wenden uns nun der folgenden Aussage zu:

$$-\frac{\omega_n(x)}{x} = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j^n \omega_j(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (48)$$

mit

$$\varepsilon_n^n = 1, \quad \varepsilon_j^n = \frac{(n-j+1)(n+j)}{2} (j+1)_{n-j-1} \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (49).$$

Man rechnet sofort nach, daß (48) für $n = 1$ gilt. Nimmt man die Formel bis zum Index n als richtig an, so gelangt man zu der für die Zahl $n+1$ unter Verwendung der aus (16) fließenden Relation:

$$-\frac{\omega_{n+1}(x)}{x} = \omega_{n+1}(x) - (2n+1) \frac{\omega_n(x)}{x} + (n-1)(n+1) \frac{\omega_{n-1}(x)}{x}.$$

Die Gleichungen (45), (46), (48) zeigen uns, daß man die Ausdrücke

$$\frac{1}{r} \frac{d\omega_n(r^2)}{dr}, \quad \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{2n+1}{2}}}, \quad \frac{\omega_n(r^2)}{r^2}$$

als Linearformen der $\omega_n(r^2)$ mit konstanten Koeffizienten darstellen kann.

Die bisherigen Ergebnisse setzen uns in den Stand, eine Reihe von Hilfssätzen abzuleiten.

Hilfssatz 3: Für $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ gilt:

$$\omega_\alpha(x) \omega_\beta(x) \omega_\gamma(x) = \sum_{j=0}^{\alpha+\beta+\gamma+1} a_j \omega_j(x).$$

Die a_j ($j = 0, 1, \dots, \alpha + \beta + \gamma + 1$) bedeuten Konstante.

Für $\alpha + \beta + \gamma \geq 1$ verschwindet a_0 .

Für $\alpha + \beta + \gamma \geq 2$ verschwinden die Koeffizienten a_0 und a_1 .

Zum Beweis beschreiten wir nicht den einfachsten Weg. Wir wollen — über den Hilfssatz hinausgehend — die explizite Darstellung von $\omega_\alpha \omega_\beta \omega_\gamma$ als Linearform der ω_j angeben. Wegen (40) und (42) können wir für $\omega_\alpha(x)$ schreiben:

$$\omega_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]} \frac{1}{i!} \frac{Z_\alpha^{(i)}(-1)}{(1+x)^{\frac{2\alpha+1}{2}-i}}.$$

Mit $\left[\frac{\alpha+1}{2}\right] \leq \alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$) und (43a) läßt sich diese Gleichung umformen in:

$$\omega_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{1}{i!} \frac{Z_\alpha^{(i)}(-1)}{(1+x)^{\frac{2\alpha+1}{2}-i}}.$$

Für das Produkt $\omega_\alpha \omega_\beta \omega_\gamma$ findet man dann:

$$\omega_\alpha(x) \omega_\beta(x) \omega_\gamma(x) = \sum_{s=0}^{\alpha+\beta+\gamma} \binom{i \ j \ k}{\alpha \ \beta \ \gamma}_s (1+x)^{-\left(\frac{2(\alpha+\beta+\gamma+1)+1}{2}-s\right)} \dots \quad (50).$$

Dabei steht $\binom{i \ j \ k}{\alpha \ \beta \ \gamma}_s$ für die Summe:

$$\binom{i \ j \ k}{\alpha \ \beta \ \gamma}_s = \sum_{i+j+k=s} \frac{Z_\alpha^{(i)}(-1)}{i!} \frac{Z_\beta^{(j)}(-1)}{j!} \frac{Z_\gamma^{(k)}(-1)}{k!}.$$

Nunmehr setzen wir (46) in die rechte Seite von (50) ein. Man erhält

$$\omega_\alpha(x) \omega_\beta(x) \omega_\gamma(x) = \sum_{t=0}^{\alpha+\beta+\gamma+1} a_t \omega_t(x) \dots \quad (51)$$

mit

$$a_t = \sum_{\lambda=t}^{\alpha+\beta+\gamma+1} \binom{i \ j \ k}{\alpha \ \beta \ \gamma}_\lambda \beta_\lambda^t \dots \quad (52)$$

Damit ist der erste Teil des Hilfssatzes 3 bewiesen. Ist $\alpha + \beta + \gamma \geq 1$, so ist mindestens einer der Indizes ≥ 1 . Bilden wir (51) für $x = 0$, so bleibt wegen Hilfssatz 2 übrig $a_0 = 0$. — Um zu erkennen, daß für $\alpha + \beta + \gamma \geq 2$ auch $a_1 = 0$ ist, bringe man (51) auf den Hauptnenner und vergleiche die Koeffizienten der höchsten Potenzen von $(1+x)$ auf beiden Seiten.

Hilfssatz 4: Für $\alpha + \beta \geq 2$, $\gamma \geq 1$ gilt:

$$\frac{\omega_\alpha(x) \omega_\beta(x) \omega_\gamma(x)}{x} = \sum_{j=2}^{\alpha+\beta+\gamma+1} b_j \omega_j(x) \quad b_j \text{ Konstante mit } b_2 = b_3.$$

Wir dividieren (51) durch x und setzen auf der rechten Seite (48) ein. Dann bekommt man:

$$\frac{\omega_\alpha(x) \omega_\beta(x) \omega_\gamma(x)}{x} = \sum_{\sigma=0}^{\alpha+\beta+\gamma+1} b_\sigma \omega_\sigma(x) \dots \quad (53)$$

mit

$$b_\sigma = - \sum_{\tau=\sigma}^{\alpha+\beta+\gamma+1} a_\tau \varepsilon_\sigma^\tau.$$

Man sieht sofort, daß b_0 verschwindet. Setzen wir nämlich in (53) für x den Wert Null ein, so bleibt auf der rechten Seite $b_0 \omega_0(0) = b_0$ übrig. Die linke Seite verschwindet, weil auf Grund unserer Voraussetzungen $\alpha + \beta \geq 2$, $\gamma \geq 1$ mindestens zwei der Indizes α, β, γ größer als Null sind. Der Ausdruck $\frac{\omega_\alpha \omega_\beta \omega_\gamma}{x}$ geht wegen Hilfssatz 2 für $x \rightarrow 0$ nach Null.

Um die Behauptung $b_2 = b_3$ zu bestätigen, bringe man (53) auf den Hauptnenner und vergleiche die Vorzeichen der Potenzen $(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma+2}$ und $(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma+1}$. Der Hilfssatz 4 kann zur Aufstellung der Formeln (27) u. (35) verwandt werden. Ausgehend von Hilfssatz 3 beweist man leicht durch Induktion:

Hilfssatz 5⁸): Das Produkt $\omega_\alpha(x) \omega_{\beta_1}(x) \omega_{\beta_2}(x) \cdot \dots \cdot \omega_{\beta_{2k}}(x)$ aus einer ungeraden Anzahl $2k+1$ von Funktionen $\omega_\alpha(x)$, $\omega_{\beta_i}(x)$ ($i=1, 2, \dots, 2k$) läßt sich als Linearform der Funktionen $\omega_0(x), \omega_1(x), \dots, \omega_{\alpha+\beta_1+\dots+\beta_{2k}+k}(x)$ mit konstanten Koeffizienten c_j schreiben:

$$\omega_\alpha(x) \omega_{\beta_1}(x) \omega_{\beta_2}(x) \cdot \dots \cdot \omega_{\beta_{2k}}(x) = \sum_{j=0}^{\alpha+\beta_1+\dots+\beta_{2k}+k} c_j \omega_j(x).$$

6. Abkürzungen

Wir haben es in Zukunft häufig mit Linearformen der $\omega_n(x)$ zu tun, wobei der Wert der konstanten Koeffizienten der $\omega_n(x)$ keine Rolle spielt. Um diesen Tatbestand auszudrücken, wollen wir ein besonderes Symbol einführen.

Wir verstehen unter $l_\mu^i(x)$ ($i=0, 1, 2; \mu \geq i$) eine Linearform der $\omega_i(x), \omega_{i+1}(x), \omega_{i+2}(x), \dots, \omega_\mu(x)$ mit konstanten, beliebigen Koeffizienten a_j , die zum Teil oder auch sämtlich den Wert Null annehmen dürfen:

$$l_\mu^i(x) = \sum_{j=i}^{\mu} a_j \omega_j(x).$$

Mit dieser Definition lassen sich die Gleichungen (45), (46), (48) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{r} \frac{d\omega_n(r^2)}{dr} = l_{n+1}^0(r^2) \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (45a),$$

$$\frac{1}{(1+x)^{\frac{2n+1}{2}}} = l_n^0(r^2) \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (46a)$$

$$\frac{\omega_n(r^2)}{r^2} = l_n^0(r^2) \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (48a).$$

Nach unserer Verabredung können wir die rechten Seiten von (46a) und (48a) durch das gleiche Symbol bezeichnen. Durch l_n^0 wird nur angegeben, daß eine Linearform der $\omega_0, \dots, \omega_n$ vorliegt. Über die Koeffizienten wird nichts ausgesagt.

Eine Folge von (48a) ist offenbar

$$\frac{l_{4n+1}^2(r^2)}{r^2} = l_{4n+1}^0(r^2) \quad (48b).$$

Die Hilfssätze 3 und 5 geben zu folgenden Formeln Anlaß:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(x) \omega_\beta(x) \omega_\gamma(x) &= l_{\alpha+\beta+\gamma+1}^0(x) & \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \\ \omega_\alpha(x) \omega_{\beta_1}(x) \omega_{\beta_2}(x) \cdot \dots \cdot \omega_{\beta_{2k}}(x) &= l_{\alpha+\beta_1+\dots+\beta_{2k}+k}^0(x) & \alpha, \beta_i \geq 0 \end{aligned} \quad (54).$$

Außer den Linearformen l_μ^i verwenden wir später noch quadratische Formen $q_\mu(x)$ der $\omega_j(x)$. Diese seien durch

$$q_\mu(x) = \sum_{1 \leq i+j \leq \mu} \alpha_{\mu,i,j} \omega_i(x) \omega_j(x) \quad \mu \geq 2 \quad (55)$$

definiert. Wie bei dem l_μ^i , so soll es auch hier auf die reellen Konstanten $\alpha_{\mu,i,j}$ nicht ankommen. Sie dürfen zum Teil oder sämtlich den Wert Null haben. In jedem Summanden der rechten Seite tritt ein Produkt aus genau zwei Faktoren $\omega_i(x) \omega_j(x)$ auf. Für die Indizes i, j gilt: $i+j \geq 1$, $i+j \leq \mu$. Die Funktion $\omega_0(x)$ tritt in einem Symbol $q_\mu(x)$ also höchstens linear auf. Wir können auch sagen: Die Funktionen $q_\mu(x)$ gehen mit $x \rightarrow 0$ mindestens wie x nach Null.

Wir vermerken noch die aus Hilfssatz 3 zu gewinnende Rechenregel:

$$\omega_\alpha(x) q_\mu(x) = l_{\mu+\alpha+1}^2(x) \quad \alpha \geq 1 \quad (56).$$

Mit (48b) gilt weiter:

$$\frac{\omega_1(x) l_{4n+1}^2(x)}{x} = q_{4n+2}(x) \quad (48c).$$

⁸) Die Formeln (44), (46), (48) und die Hilfssätze 3, 4, 5 sind Spezialfälle eines allgemeineren Entwicklungssatzes, auf den wir hier nicht eingehen.

Quadratische Formen $q_\mu(r^2)$ sind uns bereits in den Gleichungen (22a) und (30) für die erste und zweite Näherung der Gleichung der Meeresoberfläche begegnet. Sie wurden dort der Definition (55) entsprechend bezeichnet. Ebenso läßt sich der Ausdruck $q_{10}(r^2)$ von S. 346 als quadratische Form (55) mit $\mu = 10$ umrechnen. Man muß dazu die in 5. entwickelten Formeln benutzen.

7. Die n -te Näherung

Wir wenden uns nun wieder unserem Problem der Jungfernquelle zu und definieren, was wir unter der n -ten Näherung verstehen wollen. Betrachtet man die in 3. gewonnene erste, zweite und dritte Näherung, so liegt es nahe, als n -te Näherung Ausdrücke der folgenden Form anzusetzen:

a) für die n -te Näherung der Stromfunktion:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(n)}(r, z) = & \varepsilon [\Omega_Q(r, z) - \Omega^{(0)}(r, z)] + \varepsilon^3 L_4(r, z) + \dots \\ & + \varepsilon^{2\mu-1} L_{4\mu-4}(r, z) + \dots + \varepsilon^{2n-1} L_{4n-4}(r, z) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (57).$$

Die $L_{4\mu-4}(r, z)$ ($\mu = 2, 3, \dots, n$) sind dabei Linearformen der $\Omega^{(2)}(r, z), \Omega^{(3)}(r, z), \dots, \Omega^{(4\mu-4)}(r, z)$ mit konstantem Koeffizienten $\alpha_{4\mu-4, v}$, die auch den Wert Null annehmen dürfen:

$$L_{4\mu-4}(r, z) = \sum_{v=2}^{4\mu-4} \alpha_{4\mu-4, v} \Omega^{(v)}(r, z) \quad \mu = 2, 3, \dots, n \quad (58),$$

b) für die n -te Näherung der Gleichung der freien Meeresoberfläche:

$$z_M^{(n)} = q_2(r^2) \varepsilon^2 + q_6(r^2) \varepsilon^4 + \dots + q_{4\mu-2}(r^2) \varepsilon^{2\mu} + \dots + q_{4n-2}(r^2) \varepsilon^{2n} \dots \dots (59).$$

Die $q_{4\mu-2}(r^2)$ bedeuten quadratische Formen in den $\omega_i(r^2)$, wie wir sie in (55) definiert haben.

Die Ansätze (57) und (59) erfüllen die Forderungen I, II, III, IV unseres Problems exakt. Wir wollen die so definierten Funktionen $\psi^{(n)}(r, z)$ und $z_M^{(n)}$ eine n -te Näherung nennen, wenn folgenden Bedingungen genügt wird:

$$\text{V}^{(n)}: \text{Die Gleichung} \quad \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)}) = 0$$

ist erfüllt, wenn man alle Glieder vernachlässigt, die mit Potenzen $\varepsilon^{2n+1}, \varepsilon^{2n+3}, \dots$, behaftet sind.

VI⁽ⁿ⁾: Berechnet man die Geschwindigkeiten

$$u^{(n)}(r, z) = -\frac{1}{r} \psi_z^{(n)}(r, z), \quad w^{(n)}(r, z) = \frac{1}{r} \psi_r^{(n)}(r, z),$$

so wird die Bernoullische Gleichung

$$[u^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 + [w^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 = -2g z_M^{(n)}$$

erfüllt, wenn man die Glieder in $\varepsilon^{2n+2}, \varepsilon^{2n+4}, \dots$ vernachlässigt.

VII⁽ⁿ⁾: Die Funktionen $L_{4\mu-4}(r, 0)$ ($\mu = 2, 3, \dots, n$) gehen mit $r \rightarrow 0$ mindestens wie r^4 nach Null.

Man prüft leicht nach, daß die bisher aufgestellten Näherungen die erste, zweite und dritte Näherung im eben definierten Sinn darstellen. Daß für diese auch die bisher nicht gebrauchte Forderung VII gilt, erkennt man mit Hilfssatz 2 aus den Gleichungen (26) und (34).

8. Der Induktionsbeweis

Zum Schluß der Arbeit zeigen wir, daß das in 3. entwickelte Näherungsverfahren unbeschränkt fortsetzbar ist. Der Beweis wird durch Induktion erbracht. Für die $(n+1)$ -ste Näherung der Stromfunktion und der Meeresoberfläche setzen wir an:

$$\psi^{(n+1)}(r, z) = \psi^{(n)}(r, z) + L(r, z) \varepsilon^{2n+1} \dots \dots \dots (60),$$

$$z_M^{(n+1)} = z_M^{(n)} + q(r^2) \varepsilon^{2n+2} \dots \dots \dots (61).$$

Die Funktionen $L(r, z)$ und $q(r^2)$ sind so zu bestimmen, daß (60) und (61) die Forderungen I, II, III, IV exakt befriedigen. Weiter müssen V⁽ⁿ⁺¹⁾, VI⁽ⁿ⁺¹⁾ und VII⁽ⁿ⁺¹⁾ erfüllt sein, die aus V⁽ⁿ⁾, VI⁽ⁿ⁾ und VII⁽ⁿ⁾ dadurch entstehen, daß man n durch $n+1$ ersetzt.

Zur Festlegung von $L(r, z)$ gehen wir von V⁽ⁿ⁺¹⁾ aus. Danach muß für die $(n+1)$ -te Näherung die Gleichung

$$\psi^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)}) = 0 \dots \dots \dots (62)$$

erfüllt sein, wenn man alle mit ε^{2n+3} , ε^{2n+5} , ... behafteten Glieder fortläßt. Mit (60) und (61) lautet (62):

$$\psi^{(n)}(r, z_M^{(n)} + q(r^2) \varepsilon^{2n+2}) + L(r, z_M^{(n+1)}) \varepsilon^{2n+1} = 0 \quad (63).$$

Wir entwickeln den ersten Summanden nach $q(r^2) \varepsilon^{2n+2}$, den zweiten nach $z_M^{(n+1)}$. Wegen $z_M^{(n+1)} = O(\varepsilon^2)$ folgt:

$$\psi^{(n)}(r, z_M^{(n)}) + L(r, 0) \varepsilon^{2n+1} + \frac{\partial \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})}{\partial z} q(r^2) \varepsilon^{2n+2} + O(\varepsilon^{2n+3}) = 0 \quad (64).$$

Die Entwicklung von $\psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})$ und $\frac{\partial \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})}{\partial z}$ und weiterer später benötigter Größen nach

Potenzen von ε ist zwar elementar, aber mühsam auszuführen. Der Rechnungsgang wird im Anhang geschildert. Man braucht dazu wesentlich die Hilfssätze und die Gl. (45a) und (48a). Man entnimmt den Formeln (A 12) und (A 17) des Anhangs:

$$\psi^{(n)}(r, z_M^{(n)}) = l_{4n}^2(r^2) \varepsilon^{2n+1} + O(\varepsilon^{2n+3}), \quad \frac{\partial \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})}{\partial z} = O(\varepsilon) \quad (65).$$

Die Entwicklung von $\psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})$ beginnt wegen $V^{(n)}$ erst mit einer Potenz ε^{2n+1} . Setzen wir (65) in (64) ein und vernachlässigen alle Terme in ε^{2n+3} , ε^{2n+5} , ... , so ergibt sich als Bestimmungsgleichung für $L(r, 0)$:

$$L(r, 0) = -l_{4n}^2(r^2) = \sum_{j=2}^{4n} \alpha_{4n,j} \omega_j(r^2) \quad \alpha_{4n,j} \text{ Konstante} \quad (66).$$

Diese Gleichung entspricht den Randbedingungen (28) bzw. (36) für die Funktionen $L_4(r, 0)$ bzw. $L_8(r, 0)$ der zweiten bzw. dritten Näherung. Wie wir dort ausführlich dargelegt haben, so kann man auch von (66) aus auf die genaue Gestalt von $L(r, z)$ schließen.

$$L(r, z) = \sum_{j=2}^{4n} \alpha_{4n,j} \Omega^{(j)}(r, z) \quad (67).$$

Wegen (58) kann $L(r, z)$ als eine Funktion $L(r, z) = L_{4n}(r, z)$ geschrieben werden. Wie im Anhang im Anschluß an (A 12) gezeigt ist, geht die Funktion $l_{4n}^2(r^2)$ in (66) mit $r \rightarrow 0$ wie r^4 nach Null.

Die Stromfunktion $\psi^{(n+1)}(r, z)$ der $(n+1)$ -ten Näherung erfüllt damit die Forderungen I, II, III, VII⁽ⁿ⁺¹⁾ exakt. Sie wird durch die Stromfunktion und die Gleichung der Meeresoberfläche der n -ten Näherung bestimmt.

Für die Berechnung des Gliedes $q(r^2) \varepsilon^{2n+2}$ in (61) ist die Entwicklung der Geschwindigkeitskomponenten $u^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)})$ und $w^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)})$ erforderlich. Es gilt:

$$\left. \begin{aligned} -u^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)}) &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi^{(n)}(r, z)}{\partial z} + \frac{\partial L_{4n}(r, z)}{\partial z} \varepsilon^{2n+1} \right]_{z=z_M^{(n)} + q(r^2) \varepsilon^{2n+2}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})}{\partial z^2} q(r^2) \varepsilon^{2n+2} + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{4n}(r, 0)}{\partial z} \varepsilon^{2n+1} + O(\varepsilon^{2n+3}) \\ &= -u^{(n)}(r, z_M^{(n)}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})}{\partial z^2} q(r^2) \varepsilon^{2n+2} + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{4n}(r, 0)}{\partial z} \varepsilon^{2n+1} + O(\varepsilon^{2n+3}) \end{aligned} \right\} \quad (68).$$

Aus (67) folgt nun wegen (11):

$$\frac{\partial L_{4n}(r, z)}{\partial z} = \sum_{j=2}^{4n} \alpha_{4n,j} \Omega^{(j+1)}(r, z).$$

Mit (14) hat man dann

$$\frac{\partial L_{4n}(r, 0)}{\partial z} = \sum_{j=2}^{4n} \alpha_{4n,j} \omega_{j+1}(r^2) = -l_{4n+1}^2(r^2) \quad (69).$$

Setzen wir in (68) die Formeln (69) und (A 21) ein, so gewinnen wir:

$$u^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)}) = u^{(n)}(r, z_M^{(n)}) + \frac{l_{4n+1}^2(r^2)}{r} \varepsilon^{2n+1} + O(\varepsilon^{2n+3}) \quad (70).$$

Bei Berücksichtigung von (A 18a) findet man für das Quadrat von (70):

$$[u^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)})]^2 = [u^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 + \frac{4\omega_1(r^2)l_{4n+1}^2(r^2)}{r^2} \varepsilon^{2n+2} + O(\varepsilon^{2n+4}) \quad (71).$$

Das mittlere Glied der rechten Seite können wir wegen (48c) als quadratische Form $q_{4n+2}^*(r^2)$ umrechnen:

$$\frac{4\omega_1(r^2)l_{4n+1}^2(r^2)}{r^2} = q_{4n+2}^*(r^2) \quad (72).$$

Dann wird aus (71):

$$[u^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)})]^2 = [u^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 + q_{4n+2}^*(r^2) \varepsilon^{2n+2} + O(\varepsilon^{2n+4}) \quad (73).$$

Wir bilden nunmehr $w^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)})$:

$$\begin{aligned} w^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)}) &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi^{(n)}(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial L_{4n}(r, z)}{\partial r} \varepsilon^{2n+1} \right]_{z=z_M^{(n)} + q(r^2) \varepsilon^{2n+2}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})}{\partial r} + O(\varepsilon^{2n+1}) = w^{(n)}(r, z_M^{(n)}) + O(\varepsilon^{2n+1}). \end{aligned}$$

Für das Quadrat erhält man mit (A 30)

$$[w^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)})]^2 = [w^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 + O(\varepsilon^{2n+4}) \quad (74).$$

Die Bestimmung des Zusatzgliedes $q(r^2) \varepsilon^{2n+2}$ in der Gl. (61) für die Meeresoberfläche erfolgt nun mittels der Forderung VI⁽ⁿ⁺¹⁾. Danach muß für die $(n+1)$ -te Näherung die Gleichung

$$[u^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)})]^2 + [w^{(n+1)}(r, z_M^{(n+1)})]^2 = -2g z_M^{(n)} \quad (75)$$

erfüllt sein, wenn man alle Terme fortläßt, die mit Potenzen ε^{2n+4} , ε^{2n+6} , ... behaftet sind. Wir gehen mit (61), (73) und (74) in (75):

$$[u^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 + [w^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 + q_{4n+2}^*(r^2) \varepsilon^{2n+2} + O(\varepsilon^{2n+4}) = -2g z_M^{(n)} - 2g q(r^2) \varepsilon^{2n+2} \quad (76).$$

In die linke Seite führen wir den Ausdruck (A 32) ein und berücksichtigen die Tatsache, daß die n -te Näherung $z_M^{(n)}$ der Forderung VI⁽ⁿ⁾ genügt. Dann heben sich in (76) alle Terme in ε^2 , ε^4 , ..., ε^{2n} weg. Es bleibt:

$$\{q_{4n+2}^*(r^2) + q_{4n+2}^{**}(r^2)\} \varepsilon^{2n+2} + O(\varepsilon^{2n+4}) = -2g q(r^2) \varepsilon^{2n+2}.$$

Vernachlässigen wir jetzt alle Glieder in ε^{2n+4} , ε^{2n+6} , ..., so ergibt sich als Bestimmungsgleichung für $q(r^2)$:

$$-2g q(r^2) = q_{4n+2}^*(r^2) + q_{4n+2}^{**}(r^2) = q_{4n+2}(r^2).$$

Damit ist das Zusatzglied $q(r^2)$ im Ansatz für die $(n+1)$ -te Näherung als eine quadratische Form $q_{4n+2}(r^2)$ erkannt. (61) genügt wegen Hilfssatz 1 exakt der Forderung IV. Damit ist der Induktionsbeweis erbracht.

Wir bemerken zum Schluß, daß das Zusatzglied $q_{4n+2}(r^2) \varepsilon^{2n+2}$ der $(n+1)$ -ten Näherung der Gleichung der Meeresoberfläche nicht allein aus den Größen der n -ten Näherung ableitbar ist. Es ist noch zusätzlich die Stromfunktion der $(n+1)$ -ten Näherung erforderlich. In die quadratische Form $q_{4n+2}^*(r^2)$ geht nämlich nach (72) die Linearform $l_{4n+1}^2(r^2)$ ein, die sich wegen (69) aus dem Zusatzglied $L_{4n}(r, z)$ von $\psi^{(n+1)}(r, z)$ berechnet.

A n h a n g.

A 1. Die Potenzen von $z_M^{(n)}$

Die n -te Näherung für die Gleichung der freien Meeresoberfläche ist durch (59) gegeben. Obwohl die rechte Seite von (59) aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, wollen wir dafür formal die unendliche Reihe schreiben:

$$z_M^{(n)} = q_2(r^2) \varepsilon^2 + q_6(r^2) \varepsilon^4 + \dots + q_{4j-2}(r^2) \varepsilon^{2j} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} q_{4j-2}(r^2) \varepsilon^{2j}.$$

Die quadratischen Formen $q_{4j-2}(r^2)$ sind also für $j > n$ identisch Null zu setzen. Die k -te ($k \geq 1$) Potenz dieser Potenzreihe lautet dann:

$$[z_M^{(n)}]^k = \sum_{\sigma=k}^{\infty} q_{\sigma}^{(k)} \varepsilon^{2\sigma} \quad \dots \quad (A 1)$$

mit

$$q_{\sigma}^{(k)} = \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k > 0 \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k = \sigma}} q_{4\sigma_1-2}(r^2) q_{4\sigma_2-2}(r^2) \dots q_{4\sigma_k-2}(r^2) \quad \dots \quad (A 2).$$

Wir betrachten einen Summanden $q_{4\sigma_1-2}(r^2) q_{4\sigma_2-2}(r^2) \dots q_{4\sigma_k-2}(r^2)$ von (A 2). Setzen wir für die quadratischen Formen $q_{4\sigma_v-2}(r^2)$ ihre Ausdrücke (55) ein, so erhalten wir

$$q_{4\sigma_1-2}(r^2) q_{4\sigma_2-2}(r^2) \dots q_{4\sigma_k-2}(r^2) = \sum \beta \dots \omega_{i_1}(r^2) \omega_{j_1}(r^2) \omega_{i_2}(r^2) \omega_{j_2}(r^2) \dots \omega_{i_k}(r^2) \omega_{j_k}(r^2) \\ (\beta \dots \text{Konstante}) \quad \dots \quad (A 3).$$

Auf der rechten Seite von (A 3) steht eine Summe von Produkten mit genau $2k$ Faktoren $\omega_{i_1} \omega_{j_1} \dots \omega_{i_k} \omega_{j_k}$. Für die Summe der Indizes gilt wegen der Definition der $q_{4\sigma-2}$ und (A 2):

$$1 \leq k \leq i_1 + j_1 + i_2 + j_2 + \dots + i_k + j_k \leq 4\sigma - 2k \quad \dots \quad (A 4).$$

Wir betrachten nun einen einzelnen Summanden

$$\omega_{i_1}(r^2) \omega_{j_1}(r^2) \omega_{i_2}(r^2) \omega_{j_2}(r^2) \dots \omega_{i_k}(r^2) \omega_{j_k}(r^2)$$

der rechten Seite von (A 3). Wegen (A 4) gibt es mindestens einen Index ≥ 1 . Es sei i_1 dieser Index. Dann läßt sich auf das aus $2 \cdot (k-1) + 1$ Faktoren bestehende Produkt

$$\omega_{i_1}(r^2) \omega_{i_2}(r^2) \omega_{j_2}(r^2) \dots \omega_{i_k}(r^2) \omega_{j_k}(r^2)$$

der Hilfssatz 5 in der Gestalt (54) anwenden. Man findet:

$$\omega_{i_1}(r^2) \omega_{i_2}(r^2) \omega_{j_2}(r^2) \dots \omega_{i_k}(r^2) \omega_{j_k}(r^2) = l_{\lambda}^0(r^2) \quad \lambda \leq 4\sigma - k - i_1 - 1.$$

Damit hat man

$$\omega_{i_1}(r^2) \omega_{j_1}(r^2) \dots \omega_{i_k}(r^2) \omega_{j_k}(r^2) = q_{\mu}(r^2) \quad \mu \leq 4\sigma - k - 1.$$

Für (A 3) kann man dann schreiben

$$q_{4\sigma_1-2}(r^2) q_{4\sigma_2-2}(r^2) \dots q_{4\sigma_k-2}(r^2) = q_{4\sigma-k-1}(r^2)$$

und endlich für (A 1):

$$[z_M^{(n)}]^k = \sum_{\sigma=k}^{\infty} q_{4\sigma-k-1}(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \quad \dots \quad (A 5).$$

A 2. Die Entwicklung von $\psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})$ nach Potenzen von ε :

Wir betrachten zunächst die Funktion

$$L_0(r, z) = \Omega_Q(r, z) - \Omega^{(0)}(r, z) = -2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_{2j-1}(r^2)}{(2j-1)!} z^{2j-1} \quad \dots \quad (A 6).$$

Mit (A 5) erhalten wir dann

$$L_0(r, z_M^{(n)}) = -2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega_{2j-1}(r^2)}{(2j-1)!} \left(\sum_{\sigma=2j-1}^{\infty} q_{4\sigma-2j}(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \right).$$

Umordnen der Doppelreihe nach Potenzen von ε ergibt:

$$L_0(r, z_M^{(n)}) = -2 \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{1+\sigma}{2} \right\rfloor} \frac{\omega_{2j-1}(r^2)}{(2j-1)!} q_{4\sigma-2j}(r^2) \right) \varepsilon^{2\sigma} \quad \dots \quad (A 7)$$

Aus der inneren Summe der rechten Seite greifen wir einen beliebigen Summanden heraus:

$$\frac{1}{(2j-1)!} \omega_{2j-1}(r^2) q_{4\sigma-2j}(r^2) \quad \sigma \geq 1, 1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{1+\sigma}{2} \right\rfloor.$$

Zunächst ist klar, daß ein solcher Ausdruck mit $r \rightarrow 0$ mindestens wie r^4 nach Null geht. Weiter können wir wegen (56) für ihn schreiben:

$$\frac{1}{(2j-1)!} \omega_{2j-1}(r^2) q_{4\sigma-2j}(r^2) = l_{4\sigma}^2(r^2).$$

Damit läßt sich auch der Faktor bei $\varepsilon^{2\sigma}$ in (A 7) als Linearform $-\frac{1}{2} a_{4\sigma}^2(r^2)^9$ der $\omega_2(r^2), \dots, \omega_{4\sigma}(r^2)$ darstellen:

$$\sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{1+\sigma}{2} \right\rfloor} \frac{\omega_{2j-1}(r^2)}{(2j-1)!} q_{4\sigma-2j}(r^2) = -\frac{1}{2} a_{4\sigma}^2(r^2)$$

(A 7) lautet dann:

$$L_0(r, z_M^{(n)}) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} a_{4\sigma}^2(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \dots \dots \dots (A 8).$$

Die $a_{4\sigma}^2(r^2)$ gehen mit $r \rightarrow 0$ mindestens wie r^4 nach Null.

Für die Entwicklung von $\psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})$ sind noch weitere Reihen erforderlich. Auf ihre Herleitung soll hier nur kurz eingegangen werden. Man kommt zu den Resultaten, wenn man die gleichen Überlegungen anwendet, die zur Aufstellung der Entwicklung von $L_0(r, z_M^{(n)})$ führten.

So gilt zunächst für $v \geq 2$

$$\Omega^{(v)}(r, z_M^{(n)}) = \Omega^{(v)}(r, 0) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} b_{4\sigma+v}^2(r^2) \varepsilon^{2\sigma} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} b_{4\sigma+v}^2(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \dots \dots (A 9).$$

Die $b_{4\sigma+v}^2(r^2)$ gehen für $\sigma \geq 1$ mit $r \rightarrow 0$ mindestens wie r^4 nach Null. Die Berechnung von $L_{4\mu-4}(r, z_M^{(n)})$ ($\mu \geq 2$) knüpft an die Formeln (58) und (A 9) an. Setzt man:

$$\sum_{v=2}^{4\mu-4} \alpha_{4\mu-4,v} b_{4\sigma+v}^2(r^2) = c_{4\sigma+4\mu-4}^2(r^2) \quad \sigma \geq 1$$

so rechnet man nach:

$$L_{4\mu-4}(r, z_M^{(n)}) = L_{4\mu-4}(r, 0) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_{4\sigma+4\mu-4}^2(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \dots \dots \dots (A 10).$$

Führen wir in (A 10) ein:

$$L_{4\mu-4}(r, 0) = \sum_{v=2}^{4\mu-4} \alpha_{4\mu-4,v} \omega_v(r^2) = c_{4\mu-4}^2(r^2)$$

so gewinnen wir

$$L_{4\mu-4}(r, z_M^{(n)}) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} c_{4\sigma+4\mu-4}^2(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \dots \dots \dots (A 11).$$

Als Linearform der $b_{4\sigma+v}^2(r^2)$ gehen die $c_{4\sigma+4\mu-4}^2(r^2)$ ($\sigma \geq 1$) mit $r \rightarrow 0$ mindestens wie r^4 nach Null. Nach Induktionsvoraussetzung VII⁽ⁿ⁾ gilt dies auch für $L_{4\mu-4}(r, 0) = c_{4\mu-4}^2(r^2)$. Damit gehen alle Koeffizienten $c_{4\sigma+4\mu-4}^2(r^2)$ ($\sigma = 0, 1, \dots$) mit r mindestens wie r^4 nach Null.

Mit Hilfe von (A 8) und (A 11) sind wir jetzt imstande, die Entwicklung von

$\psi^{(n)}(r, z_M^{(n)}) = \varepsilon L_0(r, z_M^{(n)}) + \varepsilon^3 L_4(r, z_M^{(n)}) + \dots + \varepsilon^{2\mu-1} L_{4\mu-4}(r, z_M^{(n)}) + \dots + \varepsilon^{2n-1} L_{4n-1}(r, z_M^{(n)})$ nach Potenzen von ε anzugeben. Eine leichte Rechnung ergibt:

$$\psi^{(n)}(r, z_M^{(n)}) = \sum_{j=n}^{\infty} l_{4j}^2(r^2) \varepsilon^{2j+1} = l_{4n}^2 \varepsilon^{2n+1} + O(\varepsilon^{2n+3}) \dots \dots \dots (A 12).$$

Die neuen Koeffizienten $l_{4j}^2(r^2)$ sind als Linearformen der $a_{4j}^2(r^2)$ und $c_{4j}^2(r^2)$ Linearformen der Funktionen $\omega_2(r^2), \dots, \omega_{4j}(r^2)$. Sie gehen sämtlich mit $r \rightarrow 0$ mindestens wie r^4 nach Null. Die Summe der rechten Seite beginnt erst mit dem Index $j = n$. Nach Induktionsvoraussetzung V⁽ⁿ⁾ heben sich in $\psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})$ alle Glieder auf, die mit $\varepsilon^3, \varepsilon^5, \dots, \varepsilon^{2n-1}$ multipliziert sind.

A 3. Die Entwicklung von $[u^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2$ nach Potenzen von ε :

Unter Anwendung desselben Gedankenganges wie in A 2. findet man:

$$\frac{\partial L_0(r, z_M^{(n)})}{\partial z} = -2 \omega_1(r^2) + \sum_{\sigma=2}^{\infty} d_{4\sigma+1}^2(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \dots \dots \dots (A 13),$$

$$\frac{\partial^2 L_0(r, z_M^{(n)})}{\partial z^2} = O(\varepsilon^2) \dots \dots \dots (A 14).$$

⁹⁾ Die in 6. definierten Linearformen l_{μ}^i sollen im Anhang auch mit anderen Buchstaben a_{μ}^i, b_{μ}^i usw. bezeichnet werden. Der Buchstabe q ist jedoch ausschließlich den quadratischen Formen vorbehalten.

Die Entwicklung von

$$\frac{\partial L_{4\mu-4}(r, z)}{\partial z} = \sum_{v=2}^{4\mu-4} \alpha_{4\mu-4, v} Q^{(v+1)}(r, z) \quad \mu \geq 2$$

an der Stelle $z = z_M^{(n)}$ ergibt unter Benutzung von (A 9):

$$\frac{\partial L_{4\mu-4}(r, z_M^{(n)})}{\partial z} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} e_{4\sigma+4\mu-3}^2(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \quad \mu \geq 2 \quad \dots \quad (\text{A } 15).$$

Eine einfache Überlegung zeigt:

$$\frac{\partial^2 L_{4\mu-4}(r, z_M^{(n)})}{\partial z^2} = O(1) \quad \mu \geq 2 \quad \dots \quad (\text{A } 16).$$

Für

$$\frac{\partial \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial L_0(r, z_M^{(n)})}{\partial z} + \varepsilon^3 \frac{\partial L_4(r, z_M^{(n)})}{\partial z} + \dots + \varepsilon^{2n-1} \frac{\partial L_{4n-4}(r, z_M^{(n)})}{\partial z}$$

errechnet man mit (A 13) und (A 15):

$$\frac{\partial \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})}{\partial z} = -2 \omega_1(r^2) \varepsilon - \sum_{\sigma=1}^{\infty} f_{4\sigma+1}^2(r^2) \varepsilon^{2\sigma+1} = O(\varepsilon) \quad \dots \quad (\text{A } 17).$$

Damit lautet die Geschwindigkeitskomponente $u^{(n)}(r, z_M^{(n)})$:

$$u^{(n)}(r, z_M^{(n)}) = -\frac{1}{r} \psi_z^{(n)}(r, z_M^{(n)}) = 2 \varepsilon \frac{\omega_1(r^2)}{r} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{f_{4\sigma+1}^2(r^2)}{r} \varepsilon^{2\sigma+1} \quad \dots \quad (\text{A } 18),$$

$$= 2 \varepsilon \frac{\omega_1(r^2)}{r} + O(\varepsilon^3) \quad \dots \quad (\text{A } 18a).$$

Zur Bildung des Quadrates von (A 18) multiplizieren wir zwei beliebige Glieder der rechten Seite miteinander. Die beiden auftretenden Typen von Produkten sind:

$$\frac{\omega_1(r^2) f_{4\sigma+1}^2(r^2)}{r^2} \varepsilon^{2\sigma+2} \quad \text{und} \quad \frac{f_{4\sigma+1}^2(r^2) f_{4(\sigma-\tau)+1}^2(r^2)}{r^2} \varepsilon^{2\sigma+2} \quad \dots \quad (\text{A } 19).$$

Wegen (48c), (48b) und $f_{4\sigma+1}^2(r^2) l_{4\sigma+1}^0(r^2) = q_{4(\sigma_1+\sigma_2)+2}(r^2)$ lassen sich die Ausdrücke (A 19) als quadratische Formen $q_{4\sigma+2}(r^2)$ schreiben.

Damit gilt für $[u^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2$ die Entwicklung:

$$[u^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 = \sum_{\sigma=0}^{\infty} q_{4\sigma+2}(r^2) \varepsilon^{2\sigma+2} \quad \dots \quad (\text{A } 20).$$

Die Formeln (A 14) und (A 16) führen leicht zu

$$\frac{\partial^2 \psi^{(n)}(r, z_M^{(n)})}{\partial z^2} = O(\varepsilon^3) \quad \dots \quad (\text{A } 21).$$

A 4. Die Entwicklung von $[u^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2$ nach Potenzen von ε :

Mit (A 6) erhalten wir

$$\frac{1}{r} \frac{\partial L_0(r, z)}{\partial r} = -2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)!} \frac{\omega'_{2j-1}(r^2)}{r} z^{2j-1} \quad \left(\omega'_{2j-1}(r^2) = \frac{d\omega_{2j-1}(r^2)}{dr} \right).$$

Wegen (45a) und (A 5) wird hieraus:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial L_0(r, z_M^{(n)})}{\partial r} = \sum_{j=1}^{\infty} l_{2j}^0(r^2) \left(\sum_{\sigma=2j-1}^{\infty} q_{4\sigma-2j}(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \right).$$

Umordnung der Doppelsomme liefert:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial L_0(r, z_M^{(n)})}{\partial r} = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{1+\sigma}{2} \right\rfloor} l_{2j}^0(r^2) q_{4\sigma-2j}(r^2) \right) \varepsilon^{2\sigma} \quad \dots \quad (\text{A } 22).$$

Wir betrachten einen einzelnen Summanden der inneren Summe der rechten Seite:

$$l_{2j}^0(r^2) q_{4\sigma-2j}(r^2).$$

Dieser Ausdruck ist eine Summe von Gliedern mit drei Faktoren $\omega_i(r^2)$. Von diesen drei Faktoren hat einer bestimmt einen von Null verschiedenen Index. Die anderen beiden Indizes können Null sein. Nach Hilfssatz 3 läßt sich ein solches Produkt als Linearform der $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{4\sigma+1}$ darstellen, wobei ω_0 nicht auftritt. Setzen wir

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{1+\sigma}{2}\right]} l_{2j}^0(r^2) q_{4\sigma-2j}(r^2) = l_{4\sigma+1}^1(r^2)$$

so haben wir für (A 22) die Gleichung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial L_0(r, z_M^{(n)})}{\partial r} = \sum_{\sigma=1}^{\infty} l_{4\sigma+1}^1(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \quad \dots \quad (A 23).$$

Die folgenden Entwicklungen werden wieder nur kurz skizziert. Man muß zur Ableitung den gleichen Gedankengang wie soeben einschlagen. Es gilt für $v \geq 2$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega^{(v)}(r, z_M^{(n)})}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega^{(v)}(r, 0)}{\partial r} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} l_{4\sigma+v+1}^1(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \quad \dots \quad (A 24).$$

58) liefert in Verbindung mit (A 24):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial L_{4\mu-4}(r, z_M^{(n)})}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial L_{4\mu-4}(r, 0)}{\partial r} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} l_{4\sigma+4\mu-3}^1(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \quad \mu \geq 2 \quad (A 25).$$

Dabei wurde gesetzt

$$\frac{1}{r} \frac{\partial L_{4\mu-4}(r, 0)}{\partial r} = \sum_{v=2}^{4\mu-4} \alpha_{4\mu-4,v} \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega^{(v)}(r, 0)}{\partial r} = \sum_{v=2}^{4\mu-4} \alpha_{4\mu-4,v} \frac{\omega'_v(r^2)}{r} \quad \dots \quad (A 26).$$

Wegen (45a) läßt sich (A 26) offenbar schreiben:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial L_{4\mu-4}(r, 0)}{\partial r} = l_{4\mu-3}^0(r^2) \quad \dots \quad (A 27).$$

Nach Induktionsvoraussetzung geht nun $L_{4\mu-4}(r, 0)$ mit r mindestens wie r^4 nach Null. Damit verschwindet $\frac{1}{r} \frac{\partial L_{4\mu-4}(r, 0)}{\partial r}$ mit r mindestens wie r^2 . Setzen wir in (A 27) für r den Wert Null ein, so erkennt man, daß der Koeffizient von ω_0 in $l_{4\mu-3}^0$ verschwinden muß. Wir können also für (A 27) genauer eine Linearform $l_{4\mu-3}^1(r^2)$ der $\omega_1(r^2), \dots, \omega_{4\mu-3}(r^2)$ schreiben. Damit nimmt (A 25) die Form an:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial L_{4\mu-4}(r, z_M^{(n)})}{\partial r} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} l_{4\sigma+4\mu-3}^1(r^2) \varepsilon^{2\sigma} \quad \mu \geq 2 \quad \dots \quad (A 28).$$

Zur Ermittlung der Entwicklung von

$$w^{(n)}(r, z_M^{(n)}) = \frac{1}{r} \psi_r^{(n)}(r, z_M^{(n)}) = \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial L_0(r, z_M^{(n)})}{\partial r} + \frac{\varepsilon^3}{r} \frac{\partial L_4(r, z_M^{(n)})}{\partial r} + \dots + \frac{\varepsilon^{2n-1}}{r} \frac{\partial L_{4n-4}(r, z_M^{(n)})}{\partial r}$$

benutzen wir (A 23) und (A 28). Das Ergebnis lautet:

$$w^{(n)}(r, z_M^{(n)}) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} l_{4\sigma+1}^1(r^2) \varepsilon^{2\sigma+1} \quad \dots \quad (A 29),$$

$$= O(\varepsilon^3) \quad \dots \quad (A 30).$$

Zur Berechnung von $[w^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2$ multiplizieren wir zwei beliebige Glieder der rechten Seite von (A 29) miteinander:

$$l_{4\sigma_1+1}^1(r^2) l_{4\sigma_2+1}^1(r^2) \varepsilon^{2(\sigma_1+\sigma_2)+2}.$$

Wegen

$$l_{4\sigma_1+1}^1(r^2) l_{4\sigma_2+1}^1(r^2) = \bar{q}_{4(\sigma_1+\sigma_2)+2}(r^2)$$

erhalten wir

$$[w^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 = \sum_{\sigma=2}^{\infty} \bar{q}_{4\sigma+2}(r^2) \varepsilon^{2\sigma+2} \quad \dots \quad (A 31).$$

A 5. Die Entwicklung von $[u^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 + [w^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2$:

Addition von (A 20) und (A 31) liefert:

$$[u^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 + [w^{(n)}(r, z_M^{(n)})]^2 = \sum_{\sigma=0}^{\infty} q_{4\sigma+2}^{**}(r^2) \varepsilon^{2\sigma+2} \quad \dots \quad (A 32).$$

Eingegangen am 6. November 1951.

Beiträge zur Theorie der achsensymmetrisch belasteten schweren dicken Kreisplatte

Von István Szabó in Berlin

Auf einige Resultate früherer Untersuchungen zurückgreifend, wird noch einmal das Problem der achsensymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte unter exakter Berücksichtigung der Massenkräfte behandelt, wobei die zwischen Platte und Unterlage auftretenden Schubspannungen als Reibungskräfte im Sinne des Coulombschen Gesetzes erfaßt werden.

Taking up again some results of previous investigations, the author discusses the problem of the thick circular plate with axially symmetrical load. The own load is exactly taken into account, and the shearing stresses between plate and base are considered as friction forces in the meaning of Coulomb's law.

Revenant à quelques résultats de recherches antérieures, l'auteur discute encore une fois le problème de la plaque circulaire, épaisse, chargée symétriquement à l'axe, en considérant exactement les forces de la masse et regardant les tensions poussant entre la plaque et la base comme forces de friction agissant au sens de la loi de Coulomb.

В связи с некоторыми результатами прежних исследований еще раз рассматривается проблема осесимметрически нагруженной толстой круговой пластины при точном учете массовых сил; при этом,двигающие усилия, возникающие между пластиной и основанием, учитываются как силы трения в смысле закона Кулона.

1. Einleitung

Das Problem der auf dem elastischen Halbraum aufliegenden oder anders gelagerten und achsensymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte ist vom Verfasser unter Vernachlässigung des Eigengewichtes erschöpfend behandelt worden¹⁾. Die übliche Berücksichtigung des Eigengewichtes in der Weise, daß man es als gleichmäßig verteilt zur äußeren Last schlägt, dürfte bei dünneren Platten eine ausreichende, sicherlich aber eine sehr rohe Näherung bei Fundamentplatten sein. Die Schwierigkeit bei der exakten Berücksichtigung der Massenkraft ist — wie bei den meisten physikalischen Problemen — eine mathematische und besteht darin, daßes allein mit Hilfe von Bessel- und Exponentialfunktionen — aus denen man üblicherweise die Lösungen aufzubauen trachtet — nicht möglich ist, die entsprechenden Differentialgleichungen zu erfüllen. Der Gedanke, weitere Funktionen, insbesondere geeignete Polynome als Partikularlösungen heranzuziehen, ist naheliegend und erweist sich auch hier als fruchtbar.

2. Problemstellung für die freigelagerte auf dem Halbraum aufliegende Platte

Die auf dem als elastischen Halbraum angesehenen Boden von dem Schubmodul G_B und der Poisson'schen Zahl ν_B aufliegende Kreisplatte habe die elastischen Konstanten G und ν , den Radius a , die Höhe h , das spezifische Gewicht γ und werde durch die achsensymmetrische Druckspannung $f(r)$ belastet (Bild 1). Setzen wir zwischen Platte und Boden stetige Berührung mit der Haftreibungszahl μ_0 voraus, und bezeichnen die aus dem Bild 1 ersichtlichen Verschiebungen und Spannungen für den Boden mit dem Index B , so lauten die Randbedingungen folgendermaßen:

$$\text{Für } r = a \text{ und } 0 \leq z \leq h \text{ ist } \tau = 0 \quad (1)$$

$$\text{„ } z = 0 \text{ und } 0 \leq r \leq a \text{ ist } \sigma_z = -f(r) \quad (2)$$

$$\text{„ } z = 0 \text{ und } 0 \leq r \leq a \text{ ist } \tau = 0 \quad (3)$$

$$\text{„ } z = h \text{ bzw. } z_1 = 0 \text{ ist } \sigma_{zB} = \begin{cases} \sigma_z & \text{für } 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{„ } z = h \text{ bzw. } z_1 = 0 \text{ und } 0 \leq r \leq a \text{ ist } w = w_B \quad (5)$$

$$\text{„ } z = h \text{ bzw. } z_1 = 0 \text{ ist } \tau_B = \begin{cases} \tau & \text{für } 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{„ } z = h \text{ und } 0 \leq r \leq a \text{ ist } \tau = \mu_0 \sigma_z \quad (7)$$

$$\text{„ } r = a \text{ und } 0 \leq z \leq h \text{ ist } \sigma_r = 0 \quad (8)$$

Nach Einführung der Gesamtdehnung

$$\Theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9)$$

¹⁾ Ing.-Arch. Bd. 19 (1951), S. 128 und S. 342.

liefern die Hooke'schen Gesetze zwischen den Spannungen und Verschiebungen folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 2G \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu} \right), & \sigma_r &= 2G \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu} \right), \\ \sigma_t &= 2G \left(\frac{u}{r} + \frac{\nu \Theta}{1-2\nu} \right), & \tau &= G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (10),$$

während sich aus den Gleichgewichtsbedingungen nach Bild 1 die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} + \gamma = 0, \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \dots \dots (11)$$

ergeben.

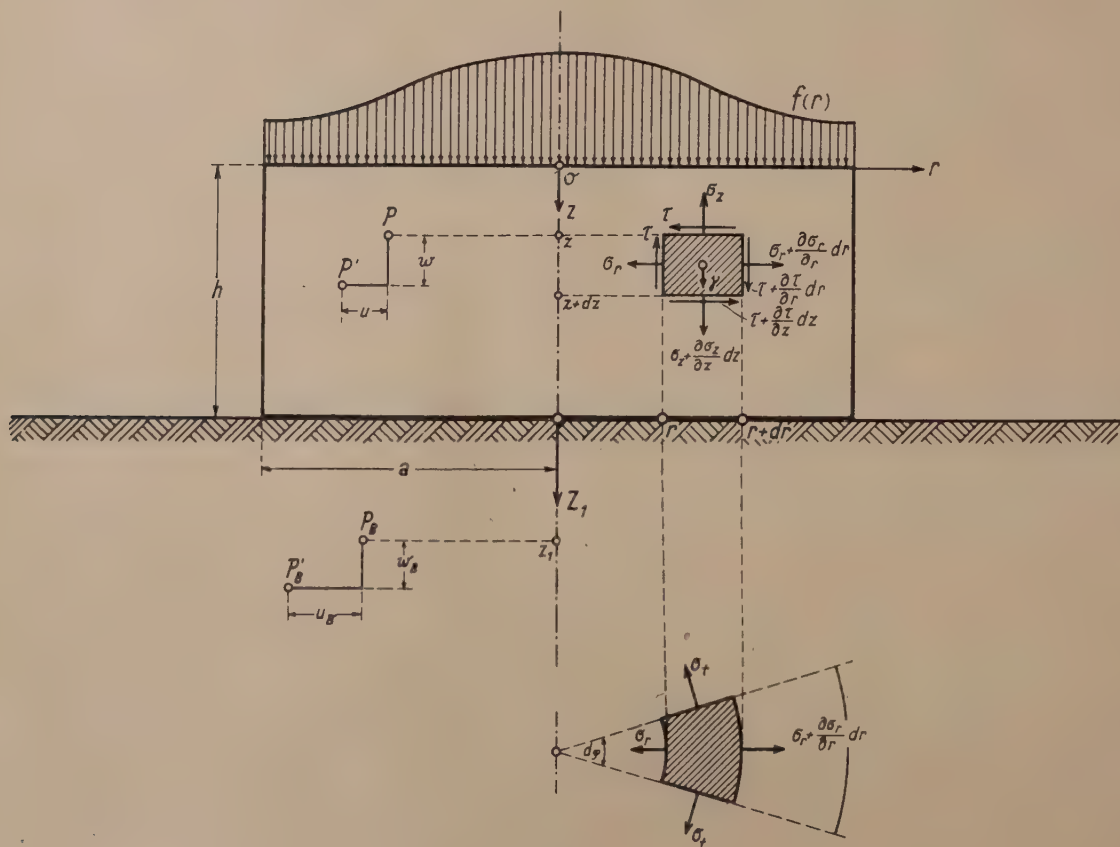


Bild 1

Setzen wir die Spannungen aus (10) in (11) ein, so bekommen wir nach Einführung des Laplaceschen Operators $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ die Differentialgleichungen:

$$(1-2\nu) \Delta w + \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\gamma(1-2\nu)}{G} = 0 \dots \dots (12)$$

$$(1-2\nu) \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 \dots \dots (13),$$

aus denen wiederum

$$\Delta \Theta = 0 \dots \dots (14)$$

folgt. Diese Differentialgleichungen gelten — wenn man $\gamma = 0$ setzt — auch für den Boden und das Problem besteht nun darin, für diese Differentialgleichungen solche Lösungen zu ermitteln, mit denen man den Randbedingungen (1) bis (8) gerecht werden kann.

3. Ermittlung der Verschiebungsfunktionen für Boden (Halbraum) und Platte

Nach meiner ersten Mitteilung²⁾ sind die Verschiebungen des Bodens, d.h. die den Differentialgleichungen (12) — für $\gamma = 0$ — und (13) genügenden Funktionen

$$w_B = \int_0^\infty \left[\Psi(\lambda) - \frac{z_1 \Phi(\lambda)}{2(1-2\nu_B)} \right] J_0(\lambda r) e^{-\lambda z_1} d\lambda \quad (15),$$

$$u_B = \int_0^\infty \left[\Psi(\lambda) + \frac{\Phi(\lambda)}{2(1-2\nu_B)\lambda} (3-4\nu_B-\lambda z_1) \right] J_1(\lambda r) e^{-\lambda z_1} d\lambda \quad (16).$$

Hierbei bedeuten $\Phi(\lambda)$ und $\Psi(\lambda)$ beliebige Funktionen und $J_0(\lambda r)$ und $J_1(\lambda r)$ die Besselschen Funktionen nullter und erster Ordnung.

Die für die Platte gültigen Verschiebungen wollen wir aus zwei Anteilen zusammensetzen. Der erste Anteil besteht aus den für $\gamma = 0$ gültigen Lösungen der Differentialgleichungen (12) und (13) und diese sind²⁾:

$$w_0 = \left\{ \left[P - \frac{p z}{2(1-2\nu)} \right] e^{-\lambda z} + \left[Q - \frac{q z}{2(1-2\nu)} \right] e^{\lambda z} \right\} J_0(\lambda r) + A z + B \quad (17)$$

$$u_0 = \left\{ \left[P + \frac{p}{2(1-2\nu)\lambda} (3-4\nu-\lambda z) \right] e^{-\lambda z} + \left[-Q + \frac{q}{2(1-2\nu)\lambda} (3-4\nu+\lambda z) \right] e^{\lambda z} \right\} J_1(\lambda r) \quad (18).$$

Hierbei sind A, B, P, Q, p, q und λ beliebige Konstanten. Der zweite Anteil soll aus den Lösungen der Differentialgleichungen (12) und (13) bzw. (14) bestehen. Wie schon einleitend betont wurde, suchen wir Polynomlösungen und setzen aus diesem Grunde als Lösung von (14)

$$\Theta = A_0 + A_1 z \quad (19)$$

an, die in (12) eingeführt mit der Abkürzung

$$\frac{A_1}{1-2\nu} + \frac{\gamma}{G} = 2C \quad (20)$$

die Differentialgleichung

$$\Delta w + 2C = 0 \quad (21)$$

ergibt. Gehen wir mit dem Polynomansatz

$$w = \sum_{k=0}^K a_k z^k + \sum_{n=1}^N b_n r^n \quad (22)$$

in (21) hinein, so bekommen wir

$$\sum a_k k(k-1) z^{k-2} + \sum b_n n(n-1) r^{n-2} + \sum b_n n r^{n-2} + 2C = 0$$

woraus sich nach Koeffizientenvergleich $a_k = 0$ für $k > 2$, $b_1 = 0$, $b_n = 0$ für $n > 2$ und schließlich

$$a_2 + 2b_2 + C = 0 \quad (23)$$

ergibt, so daß gemäß dem Ansatz (22)

$$w = a_0 + a_1 z - (C + 2b_2) z^2 + b_2 r^2 \quad (24)$$

ist. Setzen wir (19) in (13) ein, so erhalten wir

$$\Delta u - \frac{u}{r^2} = 0,$$

aus der mit dem Produktansatz $u = R(r) Z(z)$ für den Parameter Null die Differentialgleichungen

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - R(r) = 0 \quad (25)$$

$$Z''(z) = 0. \quad (26)$$

hervorgehen. Nun ist (25) eine Eulersche Differentialgleichung mit dem für $r=0$ regulären Integral $R(r) = r$, während das allgemeine Integral von (26) $Z(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z$ ist, so daß mit den beliebigen Konstanten α_0 und α_1 u in der Gestalt

$$u = (\alpha_0 + \alpha_1 z) r \quad (27)$$

²⁾ Ing.-Arch. Bd. 19 (1951), S. 128.

erscheint. Das Bestehen der Gl. (9) ergibt mit (19), (24) und (27)

$$A_0 + A_1 z = 2(\alpha_0 + \alpha_1 z) + a_1 - 2(C + 2b_2)z,$$

woraus nach Koeffizientenvergleich

$$A_1 = 2[\alpha_1 - (C + 2b_2)], \quad A_0 = 2\alpha_0 + a_1 \quad (28)$$

folgt, so daß für die Gesamtdehnung

$$\Theta = 2\alpha_0 + a_1 + 2[\alpha_1 - (C + 2b_2)]z \quad (29)$$

zu setzen ist. Nun wollen wir die Lösungen (24), (27) bzw. (29) so spezialisieren, daß sie den Randbedingungen (1), (3), (8) und der Randbedingung (2) für $f(r) = 0$ genügen. Berechnen wir die Spannungen, indem wir mit (24), (27) bzw. (29) in die entsprechenden Formeln von (10) hineingehen, so liefert (1)

$$\alpha_1 + 2b_2 = 0 \quad (30),$$

womit auch (3) erfüllt ist. Aus (8) ergeben sich die Beziehungen

$$\alpha_1 + \frac{\nu}{1-2\nu} A_1 = 0 \quad (31)$$

$$\alpha_0 + \frac{\nu}{1-2\nu} A_0 = 0 \quad (32),$$

während (2) mit $f(r) = 0$ auf

$$a_1 + \frac{\nu}{1-2\nu} A_0 = 0 \quad (33)$$

führt. Die Auflösung von (28) und (30) bis (33) liefert mit Rücksicht auf (20) und (23)

$$a_1 = 0, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{\nu\gamma}{2G(1+\nu)}, \quad b_2 = -\frac{\nu\gamma}{4G(1+\nu)}, \quad C + 2b_2 = \frac{\gamma}{4G(1+\nu)},$$

so daß aus (24) und (27) die Lösungen

$$w = \alpha_0 - \frac{\gamma}{4G(1+\nu)}(z^2 + \nu r^2) \quad (34)$$

$$u = \frac{\gamma\nu}{2G(1+\nu)} z \cdot r \quad (35)$$

hervorgehen, die bis auf die Übergangsbedingungen (4) bis (7) den Randbedingungen genügen.

Durch Superposition von (17) und (34) bzw. (18) und (35) erhalten wir die Verschiebungen, falls wir für $a_0 + B$ wieder B schreiben, in folgender Form:

$$w = \left\{ \left[P - \frac{p z}{2(1-2\nu)} \right] e^{-\lambda z} + \left[Q - \frac{q z}{2(1-2\nu)} \right] e^{\lambda z} J_0(\lambda r) + A z + B - \frac{\gamma}{4G(1+\nu)}(z^2 + \nu r^2) \right\} \quad (36)$$

$$u = \left\{ \left[P + \frac{p}{2(1-2\nu)\lambda} (3 - 4\nu - \lambda z) \right] e^{-\lambda z} + \left[-Q + \frac{q}{2(1-2\nu)\lambda} (3 - 4\nu + \lambda z) \right] e^{\lambda z} J_1(\lambda r) + \frac{\gamma\nu}{2G(1+\nu)} z \cdot r \right\} \quad (37).$$

4. Erfüllung der ersten drei Randbedingungen für die Platte

Berechnet man aus (36) und (37) τ gemäß (10), so führt die Randbedingung (1) auf $J_1(\lambda a) = 0$, so daß sich für λ — falls man mit t_k die unendlich vielen und positiven Nullstellen von $J_1(t)$ bezeichnet — als Eigenwerte

$$\lambda_k = \frac{t_k}{a} \quad (38)$$

ergeben. Dadurch haben wir (36) und (37) durch Superposition

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[P_k - 2 \frac{p_k z}{(1-2\nu)} \right] e^{-\lambda_k z} + \left[Q_k - 2 \frac{q_k z}{(1-2\nu)} \right] e^{\lambda_k z} \right\} J_0(\lambda_k r) + Az + B - \frac{\gamma}{4G(1+\nu)} (z^2 + \nu r^2) \quad (39)$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[P_k + \frac{p_k}{2(1-2\nu)\lambda_k} (3-4\nu-\lambda_k z) \right] e^{-\lambda_k z} + \left[-Q_k + \frac{q_k}{2(1-2\nu)\lambda_k} (3-4\nu+\lambda_k z) \right] e^{\lambda_k z} \right\} J_1(\lambda_k r) + \frac{\gamma \nu}{2G(1+\nu)} z \cdot r \quad (40)$$

Die Randbedingung (2) ergibt für die mit (39) und (40) nach (10) berechnete Vertikalspannung die Gleichung

$$2G \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2} (p_k + q_k) - \lambda_k P_k + \lambda_k Q_k \right] J_0(\lambda_k r) + \frac{1-\nu}{1-2\nu} A \right\} = -f(r),$$

die mit $r dr$ bzw. $J_0(\lambda_n r) r dr$ multipliziert und zwischen $r=0$ und $r=a$ integriert wegen

$$\int_0^a J_0(\lambda_k r) r dr = 0, \quad \int_0^a r J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_n r) dr = \begin{cases} \frac{a^2}{2} J_0^2(\lambda_k a) & \text{für } k=n \\ 0 & \text{für } k \neq n \end{cases}$$

zu

$$A = -\frac{1-2\nu}{(1-\nu)a^2 G} \int_0^a r \cdot f(r) dr \quad (41)$$

bzw.

$$-\frac{1}{2} (p_k + q_k) - \lambda_k P_k + \lambda_k Q_k = \frac{-\int_0^a f(r) J_0(\lambda_k r) r dr}{a^2 G J_0^2(\lambda_k a)} = c_k \quad (42)$$

führt.

Die Randbedingung (3) liefert

$$p_k - q_k + \frac{(1-2\nu)\lambda_k}{1-\nu} (P_k + Q_k) = 0 \quad (43)$$

Lösen wir (42) und (43) nach P_k und Q_k auf und setzen diese Werte in (39) und (40) ein, so bekommen wir

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{p_k}{4\lambda_k(1-2\nu)} \left[(3-4\nu+2\lambda_k z) e^{-\lambda_k z} + e^{\lambda_k z} \right] + \frac{q_k}{4\lambda_k(1-2\nu)} \left[(3-4\nu-2\lambda_k z) e^{\lambda_k z} + e^{-\lambda_k z} \right] + \frac{c_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k z \right\} J_0(\lambda_k r) + Az + B - \frac{\gamma}{4G(1+\nu)} (z^2 + \nu r^2) \quad (44)$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{p_k}{4\lambda_k(1-2\nu)} \left[(3-4\nu-2\lambda_k z) e^{-\lambda_k z} + e^{\lambda_k z} \right] + \frac{q_k}{4\lambda_k(1-2\nu)} \left[(3-4\nu+2\lambda_k z) e^{\lambda_k z} + e^{-\lambda_k z} \right] - \frac{c_k}{\lambda_k} \cos \lambda_k z \right\} J_1(\lambda_k r) + \frac{\gamma \nu}{2G(1+\nu)} z \cdot r \quad (45)$$

In diesen Verschiebungsfunktionen sind noch p_k , q_k und B unbekannt.

5. Die Erfüllung der Randbedingungen zwischen Boden (Halbraum) und Platte

Die Übergangsbedingung (4) ergibt mit (15) und (16) bzw. (44) und (45) die Gleichung

$$-2G_B \int_0^\infty \left[\Psi(\lambda) + \frac{\Phi(\lambda)}{2\lambda} \right] \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = \left\{ \begin{array}{l} 2G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} A + \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{p_k}{2(1-2\nu)} (\lambda_k h e^{-\lambda_k h} - \sin \lambda_k h) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{q_k}{2(1-2\nu)} (\lambda_k e^{\lambda_k h} \cdot h - \sin \lambda_k h) + c_k \cos \lambda_k h \right] J_0(\lambda_k r) \right\} - \gamma h \\ 0 \text{ für } r > a \end{array} \right\} \quad \text{für } r \leq a \quad (46).$$

Mit Hilfe der H a n k e l'schen Umkehrformel für $n = 0$

$$\int_0^\infty \varphi(\lambda) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda = \psi(r); \quad \varphi(\lambda) = \int_0^\infty \psi(r) J_n(\lambda r) r dr \dots \dots \dots (47)$$

und der Integralformeln

$$\int_0^a J_0(\lambda r) r dr = \frac{a}{\lambda} J_1(\lambda a), \quad \int_0^a r J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda r) r dr = \frac{\lambda a J_0(\lambda_k a) J_1(\lambda a)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \dots \dots (48)$$

erhalten wir aus (46)

$$\Psi(\lambda) + \frac{1}{2\lambda} \Phi(\lambda) = \frac{G}{G_B} \left\{ \lambda a J_1(\lambda a) \sum_{k=1}^\infty C_k \frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} + \frac{(1-\nu) A a J_1(\lambda a)}{(1-2\nu) \lambda} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \\ + \frac{\gamma h a J_1(\lambda a)}{2 G_B \lambda} \end{array} \right\} \dots \dots (49),$$

wobei zur Abkürzung

$$C_k = \frac{p_k}{2(1-2\nu)} (\lambda_k h e^{-\lambda_k h} - \sin \lambda_k h) - \frac{q_k}{2(1-2\nu)} (\lambda_k h e^{\lambda_k h} - \sin \lambda_k h) + c_k \cos \lambda_k h \quad (50)$$

eingeführt wurde.

Die Randbedingung (5) liefert mit (15) und (44) die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Psi(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = & \sum_{k=1}^\infty \left\{ -p_k [(3-4\nu+2\lambda_k h) e^{-\lambda_k h} + e^{\lambda_k h}] + \right. \\ & + q_k [(3-4\nu-2\lambda_k h) e^{\lambda_k h} + e^{-\lambda_k h}] + 4c_k (1-2\nu) \sin \lambda_k h \left. \right\} \frac{J_0(\lambda_k r)}{4\lambda_k (1-2\nu)} + \\ & + Ah + B - \frac{\gamma}{4G(1+\nu)} (h^2 + \nu r^2), \end{aligned}$$

die mit $r dr$ bzw. $J_0(\lambda_n r) r dr$ multipliziert und von $r = 0$ bis $r = a$ integriert wegen (48) und

$$\int_0^a r^3 J_0(\lambda_n r) r dr = \frac{2a^2}{\lambda_n^2} J_0(\lambda_n a) \dots \dots \dots (51)$$

zu der Beziehung

$$\int_0^\infty \Psi(\lambda) J_1(\lambda a) \frac{d\lambda}{\lambda} = \left[Ah + B - \frac{\gamma}{4G(1+\nu)} \left(h^2 + \frac{\nu}{2} a^2 \right) \right] \frac{a}{2} \dots \dots \dots (52)$$

bzw.

$$\int_0^\infty \frac{\lambda \Psi(\lambda) J_1(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_n^2} = a J_0(\lambda_n a) B_n - \frac{\gamma \nu a}{2G(1+\nu) \lambda_n^2} \dots \dots \dots (53)$$

führt, wobei

$$B_n = \frac{1}{8 \lambda_n (1 - 2\nu)} \left\{ -p_n [(3 - 4\nu + 2\lambda_n h) e^{-\lambda_n h} + e^{\lambda_n h}] + \right. \\ \left. + q_n [(3 - 4\nu - 2\lambda_n h) e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h}] + 4c_n (1 - 2\nu) \sin \lambda_n h \right\} \quad (54)$$

bedeutet.

Mit der Abkürzung

$$A_k = \frac{1}{2(1 - 2\nu)} \left\{ p_k [(2\lambda_k h - 1) e^{-\lambda_k h} + e^{\lambda_k h}] + \right. \\ \left. + q_k [(2\lambda_k h + 1) e^{\lambda_k h} - e^{-\lambda_k h}] - 4c_k (1 - 2\nu) \sin \lambda_k h \right\} \quad (55)$$

liefert die Randbedingung (6)

$$-2G_B \int_0^\infty \left[\Psi(\lambda) + \frac{(1 - \nu_B) \Phi(\lambda)}{(1 - 2\nu_B) \lambda} \right] \lambda J_1(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} G \sum_{k=1}^\infty A_k J_1(\lambda_k r) & \text{für } r \leq a \\ 0 & \text{,, } r > a \end{cases} \quad (56)$$

woraus mit (47) — für $n = 1$ — und (48)

$$\Psi(\lambda) + \frac{(1 - \nu_B) \Phi(\lambda)}{(1 - 2\nu_B) \lambda} = -\frac{aG}{2G_B} \sum_{k=1}^\infty A_k \lambda_k \frac{J_0(\lambda_k a) J_1(\lambda a)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (57)$$

folgt.

Durch Elimination von $\Phi(\lambda)$ aus (49) und (57) bekommen wir

$$\Psi(\lambda) = \frac{aG J_1(\lambda a)}{2G_B} \left\{ (1 - 2\nu_B) \sum_{k=1}^\infty A_k \lambda_k \frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} - 4(1 - \nu_B) \left[\lambda \sum_{k=1}^\infty C_k \frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1 - \nu) A}{(1 - 2\nu) \lambda} + \frac{2\gamma h (1 - \nu_B)}{G \lambda} \right] \right\} \quad (58)$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $J_1(\lambda a) \frac{d\lambda}{\lambda}$ und Integration zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ liefert unter Berücksichtigung von (52):

$$\int_0^\infty \Psi(\lambda) J_1(\lambda a) \frac{d\lambda}{\lambda} = \left[A h + B - \frac{\gamma}{4G(1 + \nu)} \left(h^2 + \nu \frac{a^2}{2} \right) \right] \frac{a}{2} = \\ -\frac{aG}{2G_B} \left\{ (1 - 2\nu_B) \sum_{k=1}^\infty A_k \lambda_k J_0(\lambda_k a) \int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a) d\lambda}{\lambda (\lambda^2 - \lambda_k^2)} - \right. \\ \left. - 4(1 - \nu_B) \left[\sum_{k=1}^\infty C_k J_0(\lambda_k a) \int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_k^2} + \left(\frac{(1 - \nu) A}{1 - 2\nu} - \frac{\gamma h}{2G} \right) \int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2} \right] \right\} \quad (59)$$

Man sieht es leicht ein, daß die hier vorkommenden uneigentlichen Integrale existieren.

Multiplizieren wir die Gl. (58) mit $\frac{\lambda J_1(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_n^2}$ und integrieren zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, so erhalten wir unter Heranziehung von (53):

$$J_0(\lambda_n a) B_n - 2G(1 + \nu) \lambda_n^2 = \frac{G}{2G_B} \left\{ (1 - 2\nu_B) \sum_{k=1}^\infty A_k \lambda_k J_0(\lambda_k a) \int_0^\infty \frac{\lambda J_1^2(\lambda a) d\lambda}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)(\lambda^2 - \lambda_n^2)} - \right. \\ \left. - 4(1 - \nu_B) \left[\sum_{k=1}^\infty C_k J_0(\lambda_k a) \int_0^\infty \frac{\lambda^2 J_1^2(\lambda a) d\lambda}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)(\lambda^2 - \lambda_n^2)} + \left(\frac{(1 - \nu) A}{1 - 2\nu} - \frac{\gamma h}{2G} \right) \int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_n^2} \right] \right\} \quad (60)$$

Alle in dieser Formel vorkommenden uneigentlichen Integrale sind konvergent.

Wir kommen jetzt zu der Randbedingung (7) und bekommen aus ihr unter Beachtung von (46) und (56) die Beziehung

$$\sum_{k=1}^\infty A_k J_1(\lambda_k r) = 2\mu_0 \left[\frac{(1 - \nu) A}{1 - 2\nu} - \frac{\gamma h}{2G} + \sum_{k=1}^\infty C_k J_0(\lambda_k r) \right] \quad (61)$$

Multiplizieren wir (61) mit $r J_0(\lambda_n r) dr$ bzw. $r dr$ und integrieren zwischen $r=0$ und $r=a$, so bekommen wir wegen der Orthogonalität der rechts stehenden Funktionen

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k A_k = a^2 \mu_0 C_n J_0^2(\lambda_n a) \quad \dots \quad (62)$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k A_k = \mu_0 \left[\frac{1-\nu}{1-2\nu} A - \frac{\gamma h}{2G} \right] a^2 \quad \dots \quad (62a),$$

wobei

$$q_{kn} = \int_0^a r J_0(\lambda_n r) J_1(\lambda_k r) dr; \quad q_k = \int_0^a r J_1(\lambda_k r) dr \quad \dots \quad (63)$$

eingeführt wurden.

Denken wir nun in (60) und (62) die durch (55), (53) und (50) definierten Abkürzungen A_k , B_k und C_k eingesetzt und die so erhaltenen Gleichungen nach den Unbekannten p_k und q_k geordnet, so kommen wir offenbar zu folgendem System von unendlich vielen linearen Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} p_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} q_k = d_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} p_k + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} q_k = \gamma_n, \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (64),$$

wobei a_{nk} , b_{nk} , α_{nk} , β_{nk} , d_n und γ_n feste Werte haben; wir wollen sie vorerst explizit nicht hinschreiben, da wir folgendes feststellen: Die Auflösbarkeit von (64) vorausgesetzt, können wir aus (58) $\Psi(\lambda)$, dann aus (57) $\Phi(\lambda)$ und schließlich aus (59) B bestimmen und damit sind die Verschiebungsfunktionen und aus ihnen die Spannungen für Boden und Platte berechenbar; d. h. wir haben mit den von uns verwendeten Funktionen keine Möglichkeit mehr, die Randbedingung (8) zu erfüllen: Diese Funktionen sind eben nicht allgemein genug, um mit ihrer Hilfe einem solchen komplizierten Randwertproblem gerecht werden zu können. Die exakte Erfüllung der Randbedingung ist also nicht möglich, wir können sie aber im Sinne des de Saint-Venant'schen Prinzips befriedigen und das wollen wir jetzt erledigen.

6. Radialspannung und Radialmoment am Plattenmantel und die näherungsweise Erfüllung der Randbedingung (8)

Am Plattenmantel ($r=a$) herrscht eine mittlere Restspannung

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_r(a, z) dz = G \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda_k h} + \frac{2\nu A}{1-2\nu} \right],$$

die mit dem Radialmoment

$$M_R = \int_0^h [\sigma_r(a, z) - \bar{\sigma}_r] z dz = G h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2(1-2\nu)} \left\{ p_k (\lambda_k^2 h^2 e^{-\lambda_k h} + 2 \lambda_k h \mathfrak{Cof} \lambda_k h - \lambda_k h \mathfrak{Sin} \lambda_k h - 2 \mathfrak{Sin} \lambda_k h) + q_k (\lambda_k^2 h^2 e^{\lambda_k h} - 2 \lambda_k h \mathfrak{Cof} \lambda_k h - \lambda_k h \mathfrak{Sin} \lambda_k h + 2 \mathfrak{Sin} \lambda_k h) - C_k [\lambda_k h \mathfrak{Sin} \lambda_k h + 2(1 - \mathfrak{Cof} \lambda_k h)] \right\} \frac{J_0(\lambda_k a)}{\lambda_k^2 h^2} \quad \dots \quad (65)$$

zusammen das statische Äquivalent der radialen Restspannungen bestimmen. Belasten wir also den Plattenmantel durch $-\sigma_r$ bzw. $-M_R$, so wird dieser im Mittel kräftefrei sein. Die zugehörigen Verschiebungen sind³⁾

$$w = \frac{1}{G(1+\nu)h^3} \left\{ 3 M_R \left[2\nu \left(z - \frac{h}{2} \right)^2 + (1-\nu)r^2 \right] - \nu h^3 \bar{\sigma}_r \left(\frac{h}{2} - z \right) \right\} \quad \dots \quad (66)$$

$$\bar{u} = -\frac{(1-\nu)r}{2G(1+\nu)h^3} \left[12 M_R \left(z - \frac{h}{2} \right) + \bar{\sigma}_r h^3 \right] \quad \dots \quad (67),$$

und nach (9) ergeben sich die Zusatzspannungen

$$\sigma_z^{(1)} = 0, \quad \tau^{(1)} = 0, \quad \sigma_r^{(1)} = \sigma_t^{(1)} = -\bar{\sigma}_r - \frac{12 M_R}{h^3} \left(z - \frac{h}{2} \right) \quad \dots \quad (68).$$

³⁾ Siehe Fußnote auf S. 359.

Aus den letzten Gleichungen folgt, daß von den Randbedingungen (1) bis (7) lediglich die aus der Randbedingung (5) fließenden Gleichungen (52) und (53) geändert werden. Aus $w_B = w + \bar{w}$ für $z = h$ bzw. $z_1 = 0$ ergibt sich an Stelle von (52) bzw. (53):

$$\int_0^{\infty} \Psi(\lambda) J_1(\lambda a) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{a}{2} \left\{ A h + B - \frac{\gamma}{4 G (1 + \nu)} \left(h^2 + \frac{1}{2} \nu a^2 \right) + \frac{\nu \bar{\sigma}_r h}{2 G (1 + \nu)} + \frac{3 M_R [\nu h^2 + (1 - \nu) a^2]}{2 G (1 + \nu) h^3} \right\} \quad (69)$$

bzw.

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda \Psi(\lambda) J_1(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_n^2} = a J_0(\lambda_n a) B_n - \frac{\gamma \nu a}{2 G (1 + \nu) \lambda_n^2} + \frac{6 M_R (1 - \nu) a}{G (1 + \nu) \lambda_n^3} \dots \quad (70).$$

Dadurch treten jetzt entsprechend (69) und (70) an Stelle von (59) und (60) die neuen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} & A h + B - \frac{\gamma}{4 G (1 + \nu)} \left(h^2 + \frac{\nu}{2} a^2 \right) + \frac{\nu \bar{\sigma}_r h}{2 G (1 + \nu)} + \frac{3 M_R [\nu h^2 + (1 - \nu) a^2]}{2 G (1 + \nu) h^3} = \\ & = \frac{G}{G_B} \left\{ (1 - 2 \nu_B) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k J_0(\lambda_k a) \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda a) d\lambda}{\lambda (\lambda^2 - \lambda_k^2)} - \right. \\ & \left. - 4 (1 - \nu_B) \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k a) \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_k^2} + \left(\frac{1 - \nu}{1 - 2 \nu} A - \frac{\gamma h}{2 G} \right) \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \dots \quad (71)$$

und

$$\left. \begin{aligned} & J_0(\lambda_n a) B_n - \frac{\gamma \nu}{2 G (1 + \nu) \lambda_n^2} = \frac{-6 M_R (1 - \nu)}{G (1 + \nu) \lambda_n^3} + \\ & + \frac{G}{2 G_B} \left\{ (1 - 2 \nu_B) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k J_0(\lambda_k a) \int_0^{\infty} \frac{\lambda J_1^2(\lambda a) d\lambda}{(\lambda^2 - \lambda_k^2) (\lambda^2 - \lambda_n^2)} - \right. \\ & \left. - 4 (1 - \nu_B) \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k a) \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 J_1^2(\lambda a) d\lambda}{(\lambda^2 - \lambda_k^2) (\lambda^2 - \lambda_n^2)} + \left(\frac{1 - \nu}{1 - 2 \nu} A - \frac{\gamma h}{2 G} \right) \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_n^2} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \dots \quad (72)$$

Für $n = 1, 2, 3 \dots$ liefern (62) bzw. (62a) und (72) das System der unendlich vielen linearen Gleichungen für die Koeffizienten p_k und q_k . Damit ist das gestellte Problem für die ersten sieben Randbedingungen exakt und für die achte im Sinne des de Saint-Venant'schen Prinzips gelöst.

7. Das System der unendlich vielen linearen Gleichungen für die Koeffizienten p_k und q_k

Die beiden Gleichungen (62) und (62a) können wir zu einer einzigen zusammenfassen, wenn wir zu den positiven Nullstellen $t_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) noch $t_0 = 0$ hinzunehmen (d. h. definieren) und

$$C_0 = c_0 = \frac{1 - \nu}{1 - 2 \nu} A - \frac{\gamma h}{2 G} \dots \quad (73)$$

eingeführen. Dann lassen sich (62) und (62a) unter Beachtung von (50) und (55) in folgender Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_n^{(1)}(\lambda_k) p_k + \varphi_n^{(1)}(-\lambda_k) q_k] - \psi^{(1)}(\lambda_n) p_n - \psi^{(1)}(-\lambda_n) q_n = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} 4 \varrho_{kn} c_k (1 - 2 \nu) \sin \lambda_k h + 2 (1 - 2 \nu) a^2 \mu_0 c_n J_0^2(\lambda_n a) \cos \lambda_n h \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \end{aligned} \right\} \dots \quad (74)$$

Hierbei bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n^{(1)}(\lambda_k) &= \varrho_{kn} [(2 \lambda_k h - 1) e^{-\lambda_k h} + e^{\lambda_k h}], \\ \psi^{(1)}(\lambda_n) &= a^2 \mu_0 J_0^2(\lambda_n a) (\lambda_n h e^{-\lambda_n h} - \sin \lambda_n h) \end{aligned} \right\} \dots \quad (75).$$

Aus (72) erhalten wir, nachdem M_R nach (65), B_k nach (54) und schließlich für (71) und (72)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a) d\lambda}{\lambda^2 - \lambda_n^2} &= a \int_0^\infty \frac{J_1^2(t) dt}{t^2 - t_n^2} = a I_n, & \int_0^\infty \frac{\lambda^2 J_1^2(\lambda a) d\lambda}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)(\lambda^2 - \lambda_n^2)} &= a \int_0^\infty \frac{t^2 J_1^2(t) dt}{(t^2 - t_k^2)(t^2 - t_n^2)} = a I_{kn}, \\ \int_0^\infty \frac{J_1^2(\lambda a) d\lambda}{\lambda(\lambda^2 - \lambda_n^2)} &= a^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(t) dt}{t(t^2 - t_n^2)} = a^2 I_n^{(1)}, & \int_0^\infty \frac{\lambda J_1^2(\lambda a) d\lambda}{(\lambda^2 - \lambda_k^2)(\lambda^2 - \lambda_n^2)} &= a^2 \int_0^\infty \frac{t J_1^2(t) dt}{(t^2 - t_k^2)(t^2 - t_n^2)} = a^2 I_{kn}^{(1)} \end{aligned} \right\} (76)$$

eingeführt werden⁴⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty [\varphi_n^{(2)}(\lambda_k) p_k + \varphi_n^{(2)}(-\lambda_k) q_k] - \psi^{(2)}(\lambda_n) p_n - \psi^{(2)}(-\lambda_n) q_n &= -2 c_n (1-2\nu) \frac{J_0(\lambda_n a)}{2 \lambda_n} \sin \lambda_n h + \\ &+ \sum_{k=1}^\infty 2(1-2\nu) c_k \left\{ \frac{6(1-\nu) J_0(\lambda_k a)}{(1+\nu) \lambda_n^2 \lambda_k^2 h^3} [\lambda_k h \sin \lambda_k h + 2(1-\cos \lambda_k h)] - \right. \\ &- \frac{G}{G_B} a J_0(\lambda_k a) [(1-2\nu_B) a \lambda_k I_{kn}^{(1)} \sin \lambda_k h + 2(1-\nu_B) I_{kn} \cos \lambda_k h] \Big\} + \\ &+ \frac{\gamma \nu (1-2\nu)}{G(1+\nu) \lambda_n^2} + 2 \frac{G}{G_B} (1-\nu_B) a I_n \left[\frac{\gamma h (1-2\nu)}{G} - 2(1-\nu) A \right], \quad (n=1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \right\} (77).$$

Hierbei wurden gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n^{(2)}(\lambda_k) &= \frac{6(1-\nu) J_0(\lambda_k a)}{(1+\nu) \lambda_n^2 \lambda_k^2 h^3} [\lambda_k h^2 e^{-\lambda_k h} + 2 \lambda_k h \cos \lambda_k h - \lambda_k h \sin \lambda_k h - 2 \sin \lambda_k h] - \\ &- \frac{G(1-2\nu_B) \lambda_k}{2 G_B} J_0(\lambda_k a) a^2 I_{kn}^{(1)} [(2 \lambda_k h - 1) e^{-\lambda_k h} + e^{\lambda_k h}] + \\ &+ 2 \frac{G}{G_B} (1-\nu_B) J_0(\lambda_k a) a I_{kn} (\lambda_k h e^{-\lambda_k h} - \sin \lambda_k h), \end{aligned} \right\} (78).$$

$$\psi^{(2)}(\lambda_n) = \frac{J_0(\lambda_n a)}{4 \lambda_n} [(3-4\nu+2 \lambda_n h) e^{-\lambda_n h} + e^{\lambda_n h}] \dots \dots \dots (79).$$

Durch die Transformation

$$p_k = 2(1-2\nu) c_k + \delta_k, \quad q_k = \varepsilon_k \dots \dots \dots (80)$$

gehen aus (74) und (77) folgende Beziehungen hervor:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty [\varphi_n^{(1)}(\lambda_k) \delta_k + \varphi_n^{(1)}(-\lambda_k) \varepsilon_k] - \psi^{(1)}(\lambda_n) \delta_n - \psi^{(1)}(-\lambda_n) \varepsilon_n &= \\ &= \sum_{k=1}^\infty 2(1-2\nu) c_k [2 c_{kn} \sin \lambda_k h - \varphi_n^{(1)}(\lambda_k)] + \\ &+ 2(1-2\nu) c_n [\psi^{(1)}(\lambda_n) + a^2 \mu_0 J_0^2(\lambda_n a) \cos \lambda_n h], \quad (n=0, 1, 2 \dots) \end{aligned} \right\} (81)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty [\varphi_n^{(2)}(\lambda_k) \delta_k + \varphi_n^{(2)}(-\lambda_k) \varepsilon_k] - \psi^{(2)}(\lambda_n) \delta_n - \psi^{(2)}(-\lambda_n) \varepsilon_n &= \\ &= \sum_{k=1}^\infty 2(1-2\nu) c_k \left\{ \frac{6(1-\nu) J_0(\lambda_k a)}{(1+\nu) \lambda_n^2 \lambda_k^2 h^3} [\lambda_k h \sin \lambda_k h + 2(1-\cos \lambda_k h)] - \right. \\ &- \frac{G}{G_B} a J_0(\lambda_k a) [(1-2\nu_B) a \lambda_k I_{kn}^{(1)} \sin \lambda_k h + 2(1-\nu_B) I_{kn} \cos \lambda_k h] - \varphi_n^{(2)}(\lambda_k) \Big\} + \\ &+ \frac{\gamma \nu (1-2\nu)}{G(1+\nu) \lambda_n^2} + 2 \frac{G}{G_B} (1-\nu_B) a I_n \left[\frac{\gamma h (1-2\nu)}{G} - 2(1-\nu) A \right], \quad (n=1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \right\} (82).$$

Bezüglich der Lösbarkeit der Gleichungssysteme (81) und (82) mit den Unbekannten $\delta_1, \delta_2, \dots$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ läßt sich folgendes aussagen: Wir dividieren (81) und (82) durch $\psi^{(1)}(\lambda_n)$ bzw. $\psi^{(2)}(\lambda_n)$ ($n=1, 2, \dots$). Dann gehen die Konstanten (d. h. die mit δ_k und ε_k nicht behafteten)

⁴⁾ Bezüglich der allgemeinen und numerischen Auswertung dieser Integrale s. die in Fußnote ¹⁾, S. 359 angegebenen Arbeiten.

Glieder von einem gewissen Zeilenindex an gegen Null. Von diesem Zeilenindex N an gehen für beide Systeme die Koeffizienten der δ_k und ε_k bis zu einem gewissen Spaltenindex $K < N$ gegen Null. Folglich erhält man von der N -ten Zeile ab ein homogenes Gleichungssystem für $\delta_K, \delta_{K+1}, \dots$ und $\varepsilon'_K, \varepsilon_{K+1}, \dots$, welches durch $\delta_K = \delta_{K+1} = \dots = \varepsilon_K = \varepsilon_{K+1} = \dots = 0$ befriedigt wird, d. h. für großes k können

$$p_k = 2(1 - 2\nu) c_k, \quad q_k = 0 \quad \dots \quad (83)$$

gesetzt werden. Die ersten $p_1, p_2, \dots, p_{K-1}, q_1, q_2, \dots, q_{K-1}$ werden in üblicher Weise aus den ersten $(K-1)$ Gleichungen vom System (74) und den ersten $(K-1)$ Gleichungen vom System (77) gewonnen.

8. Die eingespannte Platte

Die gesamte Last

$$L = 2\pi \int_0^a f(r) r dr + \pi a^2 h \gamma = \sigma_0 \pi (a^2 - a_1^2) \quad \dots \quad (84)$$

werde bei $z = h$ auf den Kreisring $\pi(a^2 - a_1^2)$ gleichmäßig übertragen (Abb. 2). Die Randbedingungen lauten:

$$\tau(a, z) = 0 \quad \dots \quad (85),$$

$$\sigma_z(r, 0) = -f(r) \quad \dots \quad (86),$$

$$\tau(r, 0) = 0 \quad \dots \quad (87),$$

$$\sigma_z(r, h) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < a_1 \\ -\sigma_0 & \text{für } a \geq r \geq a_1 \end{cases} \quad (88),$$

$$w(a, h) = 0 \quad \dots \quad (89),$$

$$\tau(r, h) = 0 \quad \dots \quad (90),$$

$$u(a, z) = 0 \quad \dots \quad (91).$$

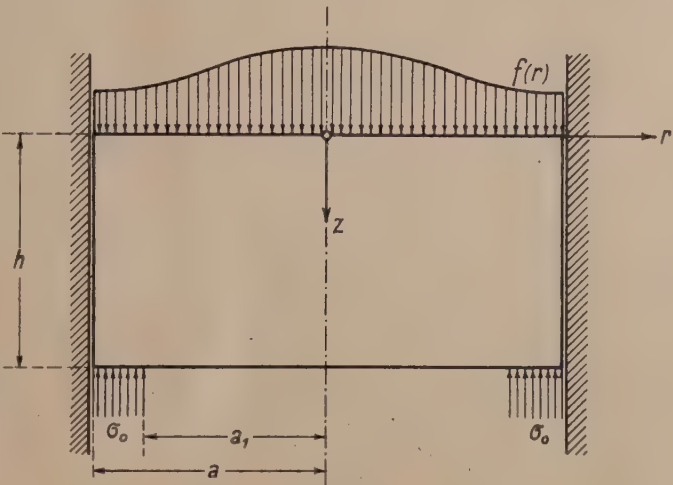


Bild 2

Zunächst ermitteln wir eine den Differentialgleichungen (12) bis (14) genügende und die Randbedingungen (85) bis (87) (letztere für $f(r) = 0$ und (89) bis (91) befriedigende Polynomlösung. Aus dem Ansatz (19) erhalten wir:

$$\Theta = -\frac{(1 - 2\nu)\gamma z}{2(1 - \nu)G} \quad \dots \quad (92)$$

und

$$\begin{aligned} w &= \frac{(1 - 2\nu)\gamma}{2(1 - \nu)G} (h^2 - z^2), \\ u &= 0 \end{aligned} \quad \dots \quad (93).$$

Den Differentialgleichungen (12) — (14) für $\gamma = 0$ genügende und die Randbedingungen (85) — (87) bzw. (89) und (91) befriedigende Lösungen sind aus (44) und (45) sofort zu entnehmen: Man streiche die letzten Glieder und ziehe in (44) $w(a, h)$ ab. Superponieren wir zu diesen Lösungen (93), so erhalten wir

$$\begin{aligned} w = \sum_{k=1}^{\infty} & \left\{ \frac{-p_k}{4\lambda_k(1 - 2\nu)} [(3 - 4\nu + 2\lambda_k z)e^{-\lambda_k z} + e^{\lambda_k z}] + \right. \\ & + \frac{q_k}{4\lambda_k(1 - 2\nu)} [(3 - 4\nu - 2\lambda_k z)e^{\lambda_k z} + e^{-\lambda_k z}] + \frac{c_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k z \Big\} J_0(\lambda_k r) + Az + \\ & + \frac{(1 - 2\nu)\gamma}{2(1 - \nu)G} (h^2 - z^2) - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{-p_k}{4\lambda_k(1 - 2\nu)} [(3 - 4\nu + 2\lambda_k h)e^{-\lambda_k h} + e^{\lambda_k h}] + \right. \\ & + \frac{q_k}{4\lambda_k(1 - 2\nu)} [(3 - 4\nu - 2\lambda_k h)e^{\lambda_k h} + e^{-\lambda_k h}] + \frac{c_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k h \Big\} J_0(\lambda_k a) - Ah + \end{aligned} \quad (94).$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{p_k}{4\lambda_k(1-2\nu)} [(3-4\nu-2\lambda_k z)e^{-\lambda_k z} + e^{\lambda_k z}] + \right. \\ \left. + \frac{q_k}{4\lambda_k(1-2\nu)} [3-4\nu+2\lambda_k z]e^{\lambda_k z} + e^{-\lambda_k z} - \frac{c_k}{\lambda_k} \mathfrak{O}[\lambda_k z] J_1(\lambda_k r) \right\} \quad (95).$$

Diese Lösungen sind nun noch den Randbedingungen (88) und (90) anzupassen.

Aus (88) ergibt sich mit (94) und (95):

$$2G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} A + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{p_k}{2(1-2\nu)} (\lambda_k h e^{-\lambda_k h} - \sin \lambda_k h) - \frac{q_k}{2(1-2\nu)} (\lambda_k h e^{\lambda_k h} - \sin \lambda_k h) + \right. \right. \\ \left. \left. + c_k \mathfrak{O}[\lambda_k h] J_0(\lambda_k r) \right] - \gamma h = \begin{cases} 0 & \text{für } r < a_1 \\ -\sigma_0 = -\frac{L}{\pi(a^2 - a_1^2)} & \text{für } a_1 \leq r \leq a \end{cases} \right\} \quad (96).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $J_0(\lambda_k r) r dr$ und integrieren zwischen $r=0$ und $r=a$ so erhalten wir wegen der Orthogonalität der Eigenfunktionen:

$$\frac{p_k}{2(1-2\nu)} (\lambda_k h e^{-\lambda_k h} - \sin \lambda_k h) - \frac{q_k}{2(1-2\nu)} (\lambda_k h e^{\lambda_k h} - \sin \lambda_k h) + c_k \mathfrak{O}[\lambda_k h] = \left. \begin{aligned} & \frac{L a_1 J_1(\lambda_k a_1)}{\pi a^2 \lambda_k (a^2 - a_1^2) G J_0^2(\lambda_k a)} = c_k^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (97).$$

Aus der Randbedingung (90) kommen wir zu der Beziehung

$$p_k (\lambda_k h e^{-\lambda_k h} + \sin \lambda_k h) + q_k (\lambda_k h e^{\lambda_k h} + \sin \lambda_k h) = 2(1-2\nu) c_k \sin \lambda_k h \quad (98).$$

Die unbekannten p_k und q_k lassen sich aus (97) und (98) ermitteln:

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{1-2\nu}{\sin^2 \lambda_k h - \lambda_k^2 h^2} \left[c_k (\lambda_k h + \frac{1}{2} \sin 2\lambda_k h + \sin^2 \lambda_k h) - c_k^{(1)} (\lambda_k h e^{\lambda_k h} + \sin \lambda_k h) \right], \\ q_k &= \frac{1-2\nu}{\sin^2 \lambda_k h - \lambda_k^2 h^2} \left[c_k^{(1)} (\lambda_k h e^{-\lambda_k h} + \sin \lambda_k h) - c_k \left(\lambda_k h + \frac{1}{2} \sin 2\lambda_k h - \sin^2 \lambda_k h \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (99).$$

Der Fall der schneideförmigen Stützung auf der unteren Plattenseite, d. h. $a_1 \rightarrow a$ ergibt aus (97) mit der L'Hospitalschen Regel

$$c_k^{(1)} = -\frac{L}{2a^2 \pi G J_0(\lambda_k a)} \quad (100).$$

In diesem Falle hat man mit Rücksicht auf die Konvergenz der auftretenden Reihen zu beachten, daß für $a_1 \rightarrow a$ die linke Seite von (96) Null zu setzen ist.

9. Die freigelagerte Platte

Die Randbedingungen (85) — (90) bleiben bestehen, während (91) durch

$$\sigma_r(a, z) = 0 \quad (101)$$

zu ersetzen ist.

Aus (44) und (45) sind die den Randbedingungen (85) bis (87) und (89) genügenden Lösungen:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4\lambda_k(1-2\nu)} \left\{ -p_k [(3-4\nu+2\lambda_k z)e^{-\lambda_k z} + e^{\lambda_k z}] + \right. \\ \left. + q_k [(3-4\nu-2\lambda_k z)e^{\lambda_k z} + e^{-\lambda_k z}] + 4c_k(1-2\nu) \sin \lambda_k z \right\} J_0(\lambda_k r) + \\ + A(z-h) + \frac{\gamma}{4G(1+\nu)} [(h^2 - z^2) + \nu(a^2 - r^2)] - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -p_k [(3-4\nu+2\lambda_k z)e^{-\lambda_k h} + e^{\lambda_k h}] + q_k [(3-4\nu-2\lambda_k h)e^{\lambda_k h} + e^{-\lambda_k h}] + \right. \\ \left. + 4c_k(1-2\nu) \sin \lambda_k h \right\} \frac{J_0(\lambda_k a)}{4\lambda_k(1-2\nu)} \quad (102)$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ p_k [(3-4\nu-2\lambda_k z)e^{-\lambda_k z} + e^{\lambda_k z}] + q_k [(3-4\nu+2\lambda_k z)e^{\lambda_k z} + e^{-\lambda_k z}] - \right. \\ \left. - 4c_k(1-2\nu) \mathfrak{O}[\lambda_k z] \right\} \frac{J_1(\lambda_k r)}{4\lambda_k(1-2\nu)} + \frac{\gamma \nu}{2G(1+\nu)} z r \quad (103).$$

Die Randbedingung (88) führt auch in diesem Falle zu der Beziehung (96), aus der sich wiederum (97) ergibt, während die Randbedingung (90) ebenfalls (98) ergibt, wodurch p_k und q_k berechnet werden können, ohne daß man noch eine Möglichkeit hätte, der Forderung (101) zu genügen. Diese Randbedingung kann auch hier nur im Sinne des de Saint-Venant'schen Prinzips befriedigt werden. Zu diesem Zweck berechnet man das statische Äquivalent der Restspannungen $\sigma_r(a, z)$ am Zylindermantel und erhält dafür wieder die nach (65) gegebene Einzelkraft bzw. das durch (66) gegebene Kräftepaar. Belastet man den Zylindermantel durch $-\bar{\sigma}_r$ und $-M_R$, so hat man dort ein Nullsystem. Beachten wir (68), so stellen wir fest, daß lediglich die Randbedingung (89) zu berücksichtigen ist bevor man die Verschiebungen durch Superposition von (67) und (102) bis (103) hinschreibt. Man erhält:

$$\begin{aligned} w = & \sum_{k=1}^{\infty} \{ -p_k [(3-4\nu+2\lambda_k z) e^{-\lambda_k z} + e^{\lambda_k z}] + q_k [(3-4\nu-2\lambda_k z) e^{\lambda_k z} + e^{-\lambda_k z}] + \\ & + 4c_k (1-2\nu) \sin \lambda_k z \} \frac{J_0(\lambda_k r)}{4\lambda_k (1-2\nu)} + A(z-h) + \frac{\gamma}{4G(1+\nu)} [(\bar{h}^2-z^2) + \nu(a^2-r^2)] + \\ & + \frac{1}{G(1+\nu)\bar{h}^3} \{ 3M_R [2\nu(z^2-hz) + (1-\nu)(r^2-a^2)] - \nu\bar{h}^3 \bar{\sigma}_r(\bar{h}-z) \} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \{ -p_k [(3-4\nu+2\lambda_k \bar{h}) e^{-\lambda_k \bar{h}} + e^{\lambda_k \bar{h}}] + q_k [(3-4\nu-2\lambda_k \bar{h}) e^{\lambda_k \bar{h}} + e^{-\lambda_k \bar{h}}] + \\ & + 4c_k (1-2\nu) \sin \lambda_k \bar{h} \} \frac{J_0(\lambda_k a)}{4\lambda_k (1-2\nu)}. \\ u = & \sum_{k=1}^{\infty} \{ p_k [(3-4\nu-2\lambda_k z) e^{-\lambda_k z} + e^{\lambda_k z}] + q_k [(3-4\nu+2\lambda_k z) e^{\lambda_k z} + e^{-\lambda_k z}] - \\ & - 4c_k (1-2\nu) \cos \lambda_k z \} \frac{J_1(\lambda_k r)}{4\lambda_k (1-2\nu)} + \frac{\gamma\nu}{2G(1+\nu)} z r - \\ & - \frac{(1-\nu)r}{2G(1+\nu)\bar{h}^3} \left[12M_R \left(z - \frac{\bar{h}}{2} \right) + \bar{\sigma}_r \bar{h}^3 \right]. \end{aligned}$$

Hierbei sind die p_k und q_k durch (99), M_R und $\bar{\sigma}_r$ durch (66) und (65) und schließlich A durch (41) gegeben.

Eingegangen am 6. Dezember 1951.

Eine neue Methode zur Berechnung der Strömungsfunktionen bei zeitlich veränderlicher Kontur^{*)}

Von Guntram v. Gorup in Darmstadt

Auf dem Weg über eine Funktionalgleichung werden die Strömungsfunktionen im Außenraum einer zeitlich veränderlichen Kontur unter der Voraussetzung einer meromorphen Abbildungsfunktion in geschlossener Form bestimmt. Als Beispiel für das Verfahren wird ein Joukowski-Profil behandelt.

Using a functional equation, the flow stream functions for the exterior of a contour that is variable with the time are determined in a closed form, whereby it is assumed that the mapping function is meromorphic. The Joukowski profile is treated as an example.

Par la voie d'une équation fonctionnelle les fonctions de courant dans l'espace extérieur d'un contour variable en égard du temps sont déterminées à la supposition d'une fonction de figuration meromorphe en forme serrée. Comme exemple pour le procède un profil à la manière de Joukowski est traité.

Путем, ведущим через одно функциональное уравнение, определяются функции течения во внешнем пространстве изменяющегося во времени контура, в предположении мероморфной функции отображения, в замкнутой форме. Для этого способа рассматривается в качестве примера, профиль Жуковского.

1. Einleitung

Ein unendlich langer Zylinder mit einer zeitlich veränderlichen Kontur C befinde sich in unbegrenzter ruhender idealer Flüssigkeit. Infolge der Veränderungen von C , die sich aus starren Verschiebungen und Drehungen, sowie aus Deformationen zusammensetzen, entsteht dann im Außenraum eine wohlbestimmte ebene Strömung.

^{*)} Ausschnitt aus der von der Technischen Hochschule Darmstadt 1951 genehmigten Dissertation des Verfassers (Referent: Prof. Dr. C. Schmieden, Korreferent: Prof. Dr. A. Walther).

Eine exakte Methode zur Berechnung der hierzu gehörigen Strömungsfunktion wurde erstmals von Steuding¹⁾ angegeben. Hiernach wird unter der Voraussetzung der Kenntnis der Abbildungsfunktion der Kontur die Strömungsfunktion als Potenzreihe bestimmt mit Koeffizienten, die sich nach Art von Fourier-Koeffizienten berechnen.

Demgegenüber liefert die vorliegende Arbeit eine ebenfalls exakte aber außerdem direkte Methode. — Eine solche Methode liegt für den Spezialfall der starren Kontur-Verschiebung und -Drehung bereits in der — einen anderen Weg benutzenden — Arbeit von Morris²⁾ vor. Wesentlich neu ist also nun die Ausdehnung auf sich deformierende Kontur.

Der beschrittene Lösungsweg gründet sich auf folgenden Gedankengang: Die Strömungsfunktion A , deren zunächst unbestimmt bleibende Zirkulation gleich Null gesetzt werden mag, ist durch zwei Bedingungen festgelegt:

1. Randbedingung; d. h.: die Normalkomponenten der Konturgeschwindigkeit und der Strömungsgeschwindigkeit müssen längs C übereinstimmen.

2. Regularitätsbedingung; d. h.: die Strömung A darf im Außenraum und auf C keine Singularitäten außer einer Senke im Unendlichen besitzen.

Wir werden die Randbedingungen durch Benutzung eines Kunstgriffes zur analytischen Bildung konjugiert komplexer Ausdrücke in eine Funktionalgleichung für A umformen. Diejenige Lösung dieser Funktionalgleichung, die auch der Regularitätsbedingung genügt, ist dann leicht explizit anzugeben.

Die Entwicklung und Anwendung von Formeln für Kraft und Moment auf die Kontur wird in einer später erscheinenden Arbeit durchgeführt werden.

2. Kontur und Abbildungsfunktion

Vorgelegt sei in der (physikalischen) komplexen z -Ebene die zeitlich veränderliche Kontur C , von der wir voraussetzen, daß sie sich nicht überschneidet und — abgesehen von höchstens endlich vielen Spitzen — glatt ist. Ferner sei in der Bildebene ζ eine feste durchweg glatte Kontur C_0 gegeben, die den Punkt $\zeta = \infty$ enthalten darf. C_0 zerlegt die ζ -Ebene in zwei getrennte Gebiete G_0 und H_0 . Bekannt sei schließlich die Abbildungsfunktion zwischen den Konturen C_0 und C ; sie soll so beschaffen sein, daß sie das Gebiet H_0 der ζ -Ebene ausnahmslos konform in das Außengebiet H der Kontur C in der physikalischen z -Ebene abbildet. Wegen der zeitlichen Veränderlichkeit von C bei fester Bildkontur C_0 muß die Abbildungsfunktion selbst auch von der Zeit abhängen. Wir bezeichnen sie mit

$$z = z(\zeta, t) \quad \dots \dots \dots (1).$$

Vorausgesetzt wird hierbei für das folgende:

1. Auf Grund der Forderung der Konformität der Abbildung $H_0 \longleftrightarrow H$ und der Annahme von höchstens endlich vielen Spitzen auf C muß die Ableitung

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = z'$$

in H_0 überall endlich und von Null verschieden sein, und darf auf C_0 nur endlich viele einfache Nullstellen haben. Für den Punkt $\zeta = \infty$ (falls er in dem Bereich $\mathfrak{B}_0 = H_0 + C_0$ liegt) sowie für den Bildpunkt von $z = \infty$ ist die Formulierung dieser Bedingung noch zu korrigieren bzw. zu verschärfen. Wir können diese beiden Ausnahmestellen am einfachsten formal mit erfassen, wenn wir allgemein als Voraussetzung schreiben:

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \quad \text{regulär und} \neq 0 \text{ in } H_0 \text{ sowie regulär und bis auf endlich viele einfache Nullstellen} \neq 0 \text{ auf } C_0. \quad (2).$$

Dabei soll sein

$$\bar{z} = \frac{z}{z} \quad \begin{array}{l} z \text{ in der Umgebung aller endlichen Punkte,} \\ \text{in der Umgebung des Punktes } z = \infty, \end{array} \quad (3)$$

analog für $\bar{\zeta}$.

2. $z(\zeta, t)$ und die Zeitableitung $\frac{\partial z}{\partial t} = \dot{z}(\zeta, t)$ seien in der ganzen Ebene meromorphe Funktionen in der Variablen ζ .

¹⁾ Steuding: Eine einfache Berechnung von Strömungsfunktionen. Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 20—22.

²⁾ Rosa Morris: Notes on Two-Dimensional Potential-Theory. II. Hydrodynamical Problems on the Motion of Cylinders. London, Philos. Mag., VII, Vol. 23 (1937), S. 757.

Die feste Bildkontur C_0 , die bisher nur allgemein als „glatt“ vorausgesetzt wurde, werden wir im folgenden von Fall zu Fall spezialisieren. Je nach dem gerade vorliegenden Problem erweist es sich als zweckmäßig als C_0 entweder die über ∞ geschlossene reelle Achse (R.A.) oder den Einheitskreis (E.K.) zu nehmen. Im ersten dieser beiden Spezialfälle benutzen wir für die Bildvariable den Buchstaben σ , im zweiten τ ³⁾. Es ist also in den beiden Fällen:

1. $C_0 = \text{R.A.}$, die Kurve $\text{Im}(\sigma) = 0$,
2. $C_0 = \text{E.K.}$, die Kurve $|\tau| = 1$.

Die Bezeichnung der Gebiete G_0 und H_0 in den beiden Fällen sind u.a. aus der Skizze (Bild 1) ersichtlich. In dieser ist auch der Zusammenhang der beiden Abbildungsfälle über eine lineare Transformation angegeben. Alle in σ hergeleiteten Ergebnisse lassen sich damit ohne weiteres auf τ umrechnen und umgekehrt.

3. Regularitätsbedingung, \Re und \Re' -Funktion

Die Strömungsfunktion A der durch die veränderliche Kontur C hervorgerufenen zirkulationsfreien Strömung muß im ganzen Außenbereich $\mathfrak{B} = H + C$ regulär sein mit Ausnahme einer logarithmischen Singularität mit reellem Vorfaktor in $z = \infty$. (Senke im Unendlichen). Folglich gilt dasselbe für das Verhalten von A im Bereich \mathfrak{B}_0 der ζ -Ebene, nur liegt dort die gleiche logarithmische Singularität im Bild von $z = \infty$.

Das Verhalten der Ableitung $A' = \frac{\partial A}{\partial \zeta}$ leitet man aus dem von $\frac{\partial A}{\partial \tilde{\zeta}}$ ab (wegen $\tilde{\zeta}$ vgl. Formel 3). $\frac{\partial A}{\partial \tilde{\zeta}}$ wird nämlich in \mathfrak{B}_0 regulär sein mit Ausnahme eines Poles 1. Ordnung mit reellem Residuum im Bild von $z = \infty$. Dasselbe gilt für A' , nur kommt noch zusätzlich: Doppelte Nullstelle in $\zeta = \infty$ (falls dieser Punkt zu \mathfrak{B}_0 gehört), mit dem Sonderfall einer nur einfachen Nullstelle mit reellem Vorfaktor des Lineargliedes, wenn $\zeta = \infty$ Bild von $z = \infty$ ist (das letztere trifft für die meisten der gewöhnlich verwendeten Abbildungen auf $C_0 = \text{E.K.}$ zu).

Eine Funktion, die die für die Strömungsfunktion A formulierte Regularitätsbedingung erfüllt, nennen wir fortan eine \Re -Funktion, ebenso eine Funktion, die die Regularitätsbedingung für A' erfüllt, eine \Re' -Funktion. — Insbesondere ist also A eine \Re -Funktion, A' eine \Re' -Funktion.

4. Aufstellung einer Funktionalgleichung für die Randbedingung; Einführung der Operation *

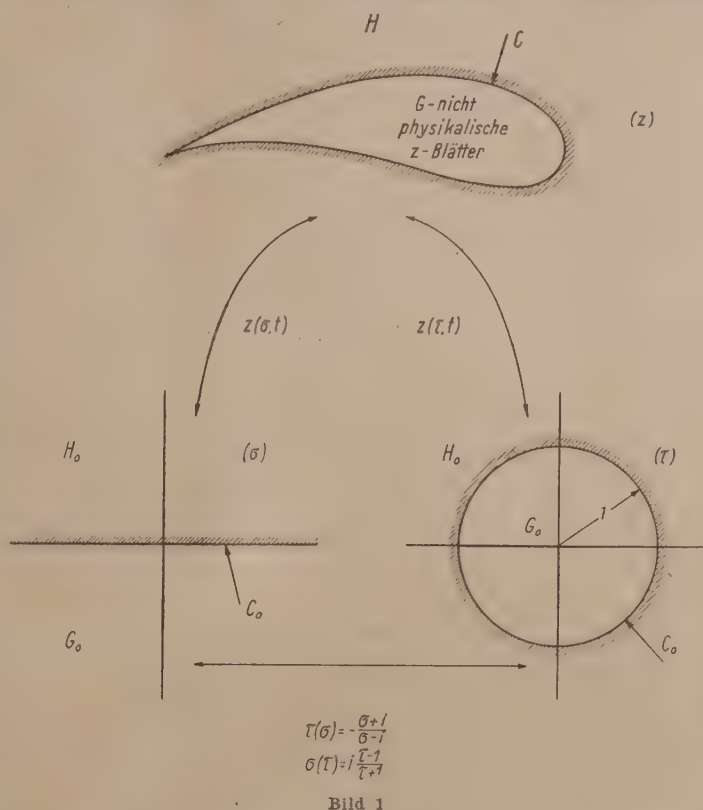
In diesem Absatz spezialisieren wir uns zunächst zweckmäßig auf den Fall $C_0 = \text{R.A.}$, schreiben also demnach wie in Abs. 2 vereinbart σ statt ζ .

Randbedingung: Sie lautet: Normalkomponente der Konturgeschwindigkeit \dot{z} ⁴⁾ längs $C = \text{Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit } \frac{dA}{dz}$ ⁵⁾ längs C .

³⁾ Nur bei Untersuchungen, in denen — so wie bisher — C_0 beliebig ist, schreiben wir ζ als Bildvariable.

⁴⁾ Man stellt fest, daß bei der Beschreibung der veränderlichen Kontur C durch eine veränderliche Abb.-Funktion bei fester Bildkontur C_0 die Geschwindigkeit der Punkte von C gerade durch die partielle Zeitableitung der Abb.-Funktion dargestellt wird.

⁵⁾ Der übergesetzte Querstrich bedeutet wie üblich die Bildung des konjugiert Komplexen.



In Gleichungsform:

$$\left(\frac{dA}{dz}\right)_n = \left(\frac{A'}{z'}\right)_n (=) (\dot{z})_n \dots \dots \dots (4).$$

Dabei soll das eingeklammerte Gleichheitszeichen andeuten, daß Gleichheit nur auf C bzw. C_0 gefordert wird.

Gleichung (4), die die Bildung von Normalkomponenten enthält, schreiben wir um in eine Gleichung zwischen Realteilen, indem wir auf beiden Seiten durch den in Normalenrichtung liegenden Zeiger $(-iz')$ dividieren:

$$\Re\left(i \frac{A'}{z'z'}\right) (=) \Re\left(i \frac{\dot{z}}{z'}\right),$$

oder:

$$i \frac{A'}{z'z'} - i \frac{A'}{z'z'} (=) i \frac{\dot{z}}{z'} - i \frac{\dot{z}}{z'} \dots \dots \dots (5).$$

Operation*. Die in (5) vorkommenden Bildungen des konjugiert Komplexen, durch die die analytische Eigenschaft bei den betroffenen Funktionen zerstört wird, lassen sich durch einen Kunstgriff umgehen. — Die beiden Seiten von (5) brauchen, als Funktion von σ und t betrachtet, nur längs $C_0 = R.A.$ übereinstimmen. Für reelle Werte von σ kann man aber das konjugiert Komplexe einer beliebigen meromorphen Funktion $f(\sigma)$ als analytische Funktion bilden, wenn man nur in der Funktion i durch $-i$ ersetzt, das Argument aber beibehält. — Wir bezeichnen die entstehende neue Funktion durch Anhängen eines Sternes. Es gilt also:

$$f(\sigma) (=) \bar{f}(\sigma) \equiv f(\sigma)^* \dots \dots \dots (6).$$

Man kann * als einen Operator auffassen, der folgende Eigenschaften hat:

1. Assoziativ zur Addition und Multiplikation.
2. Mit Differentiation oder Integration nach σ oder einem reellen Parameter vertauschbar.
3. Involutorisch.

Funktionalgleichung: Bei Verwendung des Operators * geht (5) — bei gleichzeitiger Multiplikation mit $iz'z'$ — über in die Funktionalgleichung

$$A' - A'^* = \dot{z}^* z' - \dot{z} z'^* \dots \dots \dots (7).$$

(7) gilt gemäß der Herleitung zunächst nur auf R.A. Da aber beide Seiten der Gleichung nur noch analytische Funktionen enthalten, so ergibt sich daraus nach dem Identitätssatz die Gültigkeit in der ganzen Ebene. Dies ist durch die Verwendung des gewöhnlichen Gleichheitszeichens statt des eingeklammerten zum Ausdruck gebracht.

Erweiterung auf $C_0 = E.K.$: Für den Abbildungsfall $C_0 = E.K.$ verläuft die Herleitung der entsprechenden Funktionalgleichung nur wenig anders^{*)}. Wir können sie uns aber auch leicht durch Umrechnung der Gleichung (7) verschaffen. Diese läßt sich wegen der Vertauschbarkeit der Operation * mit der Differentiation nach σ in der Form schreiben

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma} - \frac{\partial(A^*)}{\partial \sigma} = \dot{z}^* \frac{\partial z}{\partial \sigma} - \dot{z} \frac{\partial(z^*)}{\partial \sigma} \dots \dots \dots (8).$$

(Die Ableitungen nach σ sind hier ausgeschrieben, um Verwechslungen mit den im folgenden auftretenden Ableitungen nach τ zu vermeiden.)

Nun besteht der Zusammenhang zwischen σ und τ über eine analytische Funktion

$$\sigma = q(\tau).$$

(Es ist hier nicht nötig diese Funktion speziell zu geben.) Demnach

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{q'} \frac{\partial}{\partial \tau} \dots \dots \dots (9).$$

Da (8) in den Ableitungen nach σ linear und homogen ist, hebt sich nach Einsetzen der gemeinsamen Nenner q' heraus und es erscheinen statt der Ableitungen nach σ einfach die nach τ .

*) Vgl. das Vortragsreferat. Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 284.

Um dann die endgültige Form der neuen Funktionalgleichung zu bekommen, ist noch die Vertauschung von $*$ mit $\frac{\partial}{\partial \tau}$ durchzuführen. Dazu muß man sich die Wirkung des Operators $*$ auf eine in den Variablen τ und t geschriebene Funktion überlegen. — Es muß sein:

$$f(\tau)^* (=) \overline{f(\tau)} = \bar{f}(\bar{\tau}).$$

Da aber wegen $|\tau| (=) 1$

$$\bar{\tau} (=) \frac{1}{\tau}$$

gilt, so wird

$$f(\tau)^* = \bar{f}\left(\frac{1}{\tau}\right) \dots \dots \dots (10).$$

Damit findet man als Vertauschungsregel

$$\frac{\partial(f^*)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)^* \dots \dots \dots (11).$$

Die Funktionalgleichung lautet daher in τ geschrieben:

$$\tau A' + \frac{1}{\tau} A'^* = \tau \dot{z}^* z' + \frac{1}{\tau} \dot{z} z'^* \dots \dots \dots (12),$$

wobei nun, da Verwechslungen nicht mehr möglich sind, der Strich Differentiation nach τ bezeichnet.

5. Lösung der Funktionalgleichung unter Beachtung der Regularitätsbedingung

Wir beschäftigen uns zunächst wieder mit $C_0 = \text{R.A.}$, gehen also von der Funktionalgleichung (7) aus. — Eine triviale — jedoch die Regularitätsbedingung im allgemeinen nicht erfüllende — Lösung dieser Gleichung ist $\dot{z}^* z'$, wie ohne weiteres ersichtlich ist.

Die homogene Funktionalgleichung (mit der rechten Seite Null, also $\dot{z} = 0$, was eine ruhende, somit nur umströmte Kontur bedeutet) wird gelöst durch jeden Ausdruck der Form

$$h(\sigma) + h(\sigma)^*$$

mit beliebigem meromorphem $h(\sigma)$.

Die allgemeine Lösung der vollständigen Funktionalgleichung (7) ist demnach durch die Summe ⁷⁾

$$A' = \dot{z}^* z' + h(\sigma) + h(\sigma)^* \dots \dots \dots (13)$$

gegeben. — $h(\sigma)$ muß nun so bestimmt werden, daß A' die Regularitätsbedingung aus Abs. 3 erfüllt. Dazu betrachten wir die Lösung $\dot{z}^* z'$. Sie hat Pole in beiden Halbebenen (also in den Gebieten G_0 und H_0) und besitzt im Unendlichen das Verhalten $O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$. Mittels Partialbruchzerlegung spalten wir sie in einen Teil mit Polen nur in G_0 und einen zweiten mit Polen nur in H_0 auf. Wir fügen dann zu ersterem noch einen Term $\frac{\mu}{\sigma - c}$, zum zweiten den entgegengesetzten Term hinzu ($c = \text{Bild von } z = \infty$; μ reell, wird weiter unten festgelegt). Die ganze Aufspaltung sei mit

$$\dot{z}^* z' = R(\dot{z}^* z') + S(\dot{z}^* z') \dots \dots \dots (14)$$

bezeichnet. Durch die formale Hinzunahme des Termes $\frac{\mu}{\sigma - c}$ wird erreicht, daß die Funktion

$$R(\dot{z}^* z') - [S(\dot{z}^* z')]^*$$

eine \Re' -Funktion (siehe Abs. 3) ist. Und zwar aus folgenden Gründen:

1. Die Hinzunahme des μ -Termes bewirkt, daß in $R - S^*$ zusätzlich das Glied

$$\mu \left(\frac{1}{\sigma - c} + \frac{1}{\sigma - \bar{c}} \right) = 2\mu \frac{1}{\sigma} + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

vorkommt, mit dem durch passende Wahl von μ das richtige Verhalten im Unendlichen, nämlich $O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$, für den ganzen Ausdruck erzwungen werden kann. Es genügt, μ rein reell zu nehmen;

⁷⁾ Wegen der Linearität der Funktionalgleichung gelten alle bekannten Überlagerungssätze für die Lösungen.

denn offenbar müssen alle Terme $O\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ in $R + S$ in 1. Ordnung sich gegenseitig zerstören (weil $\dot{z}^* z' = O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$); für die Terme mit rein imaginärem Vorfaktor folgt dann aber dasselbe für $R - S^*$.

2. S^* ist in \mathfrak{B}_0 regulär, R desgleichen bis auf einen Pol 1. Ordnung in $\sigma = c$ mit dem reellen Residuum μ .

Wir setzen nun in (13)

$$h(\sigma) = -S(\dot{z}^* z') \dots \dots \dots (15).$$

Dann wird

$$A' = R(\dot{z}^* z') - [S(\dot{z}^* z')]^* \dots \dots \dots (16)$$

Von dieser Lösung wurde aber bereits bewiesen, daß sie eine \mathfrak{H}' -Funktion ist. A ist daher die gesuchte Strömungsfunktion für die zirkulationsfreie Strömung im Außenraum des veränderlichen Zylinders.

Bei Verwendung der Abbildung auf $C_0 = \text{E.K.}$ (Variable τ) entsteht entsprechend:

$$A' = R(\dot{z}^* z') + \frac{1}{\tau^2} [S(\dot{z}^* z')]^* \dots \dots \dots (17)$$

(auch direkt aus (16) durch formale Umformung zu erhalten). Damit die rechte Seite von (17) eine \mathfrak{H}' -Funktion wird, muß — wie man leicht findet — die Zerlegung (14) in folgender Weise durchgeführt werden:

Alle Partialbrüche mit Pol in G_0 werden zu R genommen, alle mit Pol in H_0 zu S , außerdem alle Konstanten zu S . Eine Ausnahme erfordern aber die Glieder in $\frac{1}{\tau}$. Diejenigen mit reellem Vorfaktor kommen zu R , diejenigen mit imaginärem Vorfaktor werden zu gleichen Teilen in R und S aufgenommen.

6. Sonderfall der starren Verschiebung und Drehung

Bestehen die Veränderungen der Kontur C nur aus starren Verschiebungen und Drehungen, dann vereinfacht sich die Berechnung der Strömungsfunktion erheblich.

Es sei nun $z(\sigma)$ die Abbildungsfunktion der in der mitbewegten z -Ebene festen Kontur C . Die Abbildungsfunktion bezogen auf die ruhende z_0 -Ebene lautet dann:

$$z_0 = e^{i\alpha} z + s \dots \dots \dots (18).$$

Dabei ist α der Drehwinkel der z - gegen die z_0 -Ebene und s der Ort des Punktes $z = 0$ in der z_0 -Ebene, beides zur Zeit t .

Setzen wir (18) in die Funktionalgleichung (7) ein, dann entsteht:

$$X' - X'^* = -i\dot{\alpha} z^* z' - i\dot{\alpha} z z'^* + \dot{s} e^{i\alpha} z' - \dot{s} e^{-i\alpha} z'^*. \quad ^8)$$

Beachten wir hier die Vertauschbarkeit der Symbole $' = \frac{\partial}{\partial \sigma}$ und $*$, dann können wir beiderseits nach σ integrieren:

$$X - X^* = -i\dot{\alpha} z z^* + \dot{s} e^{i\alpha} z - \dot{s} e^{-i\alpha} z^*.$$

Dies können wir auch als zwei getrennte Funktionalgleichungen für die beiden Bewegungsfälle schreiben:

$$X_1 - X_1^* = \bar{v} z - v z^*, \dots \dots \dots (19)$$

$$X_2 - X_2^* = -i\dot{\alpha} z z^*, \dots \dots \dots (20)$$

$v = \dot{s} e^{-i\alpha}$ ist der komplexe Geschwindigkeitsvektor des Punktes $z = 0$ bezogen auf die z -Ebene.

Die Funktionalgleichungen (19) und (20) ergeben sich in derselben Form für den Abbildungsfall $C_0 = \text{E.K.}$ Das ist auch sofort einzusehen, da diese Gleichungen keine Ableitungen nach der Bildvariablen σ bzw. τ enthalten.

Die Lösung der Funktionalgleichungen (19) und (20) geht auf einem der Lösung von (7) entsprechenden Weg vor sich. Nur ist zu beachten, daß X_1 und X_2 jetzt \mathfrak{H} -Funktionen werden müssen.

⁸⁾ Zum Unterschied von der Strömung bei veränderlicher Kontur bezeichnen wir die Strömungsfunktion bei starrer Bewegung mit X statt A .

Als triviale Lösungen — die jedoch im allgemeinen keine \Re -Funktionen sind — erkennt man in den beiden Fällen:

$$\begin{aligned} \bar{v} z & \text{ für (19),} \\ -\frac{1}{2} i \dot{\alpha} z z^* & \text{ für (20).} \end{aligned}$$

Zu ihnen sind wieder geeignete Lösungen der zu (19) und (20) gehörenden homogenen Funktionalgleichungen hinzuzufügen. So ergibt sich

$$X_1 = \bar{v} z - (S(\bar{v} z) + [S(\bar{v} z)]^*) = R(\bar{v} z) - [S(\bar{v} z)]^*$$

und schließlich

$$X_1 = \bar{v} R(z) - v [S(z)]^* \dots \dots \dots (21).$$

Entsprechend:

$$X_2 = -\frac{1}{2} i \dot{\alpha} z z^* + S\left(\frac{1}{2} i \dot{\alpha} z z^*\right) + \left[S\left(\frac{1}{2} i \dot{\alpha} z z^*\right)\right]^* = -R\left(\frac{1}{2} i \dot{\alpha} z z^*\right) + \left[S\left(\frac{1}{2} i \dot{\alpha} z z^*\right)\right]^*,$$

woraus wegen $[S(z z^*)]^* = R(z z^*)$ das einfache Ergebnis entsteht

$$X_2 = -i \dot{\alpha} R(z z^*) \dots \dots \dots (22).$$

Die beiden für (21) und (22) nötigen Zerlegungen in $R + S$ sind hier — für beide Abbildungsfälle — leichter durchzuführen als bei (14). Nach Partialbruchzerlegung von z bzw. $z z^*$ sind nämlich — ohne weitere formale Hinzunahme von Zusatzgliedern — $R(z)$ bzw. $R(z z^*)$ sofort \Re -Funktionen, wenn nur die einzelnen Partialbrüche je nach dem Ort ihres Poles auf R und S aufgeteilt werden. Mit dieser Überlegung ist gleichzeitig, da offenbar auch $[S(z)]^*$, mit den an C_0 gespiegelten Singularitäten von S , eine \Re -Funktion ist, der noch fehlende Beweis dafür erbracht, daß die Ausdrücke X_1 und X_2 tatsächlich \Re -Funktionen, und somit die gesuchten Strömungsfunktionen sind.

Eine besondere Bedeutung der Formeln (21) und (22) liegt nun auch darin, daß sie sich wegen der Überlagerbarkeit von Strömungen und Strömungsfunktionen gemeinsam mit der Formel (16) bzw. (17) verwenden lassen. Man kann sich so eine beliebige Konturänderung passend aus einer reinen Verschiebung (Geschw. v) und Drehung (Geschw. $\dot{\alpha}$) sowie aus einer Deformation (Geschw. \dot{z}) aufgebaut denken. Die dazu gehörenden Strömungsfunktionen werden dann einzeln bestimmt und addiert. — Da die Berechnung des Anteils der Strömungsfunktion infolge einer in der gesamten Konturänderung enthaltenen Verschiebung oder Drehung über die Formeln (21) und (22) erheblich einfacher ist als über (16) bzw. (17), so läßt sich durch die Zerlegung in Teilströmungen der gesamte Rechenaufwand erheblich abkürzen.

Dem Schlußergebnis kann noch eine Zirkulation beliebiger Stärke Γ überlagert werden. Für die beiden verwendeten Abbildungsfälle gehören dazu die Strömungsfunktionen

$$\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\sigma - \bar{c}}{\sigma - c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \tau.$$

7. Beispiel: J o u k o w s k i-Profil

In der z -Ebene wird durch die Abbildungsfunktion

$$z = -iA \left(\frac{1}{\sigma - i} - \frac{1}{\sigma - a} \right) \dots \dots \dots (23).$$

(A reell und > 0 , $a = p - iq$ mit $p \geq 0$ und $q > 1$) aus der reellen σ -Achse ein Joukowski-Profil erzeugt⁹⁾. Die obere σ -Halbebene (H_0) geht, da frei von Nullstellen der Ableitung z' , konform in das Äußere des Profils über. $\sigma = i$ liefert den Punkt $z = \infty$, $\sigma = \infty$ gibt wegen $z' = O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right)$ die Spitze des Profils, die in $z = 0$ liegt.

Sind A und a Funktionen der Zeit, dann deformiert sich das Profil, bleibt aber immer ein Joukowski-Profil, insbesondere bleibt die Spitze dauernd erhalten. (Darin, daß für das ständige Vorhandensein einer Spitze keine zusätzliche Bedingung mehr aufgestellt werden muß, liegt

⁹⁾ Diese weniger bekannte Art der Abbildung der Joukowski-Profile ist hier zweckmäßiger. — Die Gleichwertigkeit von (23) mit der üblichen Abbildung auf einen Kreis läßt sich durch eine kurze Rechnung zeigen.

der bedeutende Vorteil der Abbildung des Profils auf R.A.) Zeitliche Änderung von A allein gibt ähnliche Vergrößerung und Verkleinerung des Profils; ändert sich nur a , dann variiert die Dicke und Wölbung.

Es soll hier nur der Fall eines veränderlichen a behandelt werden. (Der andere Fall verläuft in der Rechnung ähnlich, das Ergebnis ist zu dem hier hergeleiteten zu addieren.)

Aus (23) bildet man

$$\dot{z}^* = -iA\dot{\bar{a}} \frac{1}{(\sigma - \bar{a})^2}$$

$$z' = +iA \left[\frac{1}{(\sigma - i)^2} - \frac{1}{(\sigma - a)^2} \right].$$

Der sich ergebende Ausdruck für $\dot{z}^* z'$ wird nun in Partialbrüche zerlegt. — Das liefert:

$$\dot{z}^* z' = A^2 \dot{\bar{a}} \left[-\frac{1}{(a - \bar{a})^2} \frac{1}{(\sigma - a)^2} + \frac{2}{(a - \bar{a})^3} \frac{1}{\sigma - a} \right]$$

$$+ A^2 \dot{\bar{a}} \left[\frac{1}{(i - \bar{a})^2} \frac{1}{(\sigma - i)^2} - \frac{2}{(i - \bar{a})^3} \frac{1}{\sigma - i} + \frac{1}{(i - \bar{a})^2} \frac{1}{(\sigma - \bar{a})^2} + \frac{2}{(i - \bar{a})^3} \frac{1}{\sigma - \bar{a}} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(a - \bar{a})^2} \frac{1}{(\sigma - \bar{a})^2} - \frac{2}{(a - \bar{a})^3} \frac{1}{\sigma - \bar{a}} \right].$$

Hier sind die einzelnen Terme, je nach dem Gebiet, in dem ihr Pol liegt, bereits aufgeteilt in zwei Gruppen. Um die Anteile R und S zu erhalten, ist zu den beiden Gruppen $\frac{\mu}{\sigma - i}$ bzw. $\frac{-\mu}{\sigma - i}$ zu addieren. Aus der Forderung, daß $R - S^*$ eine \mathfrak{H}' -Funktion sein soll, erhalten wir dann

$$\mu = A^2 (\dot{a} - \dot{\bar{a}}) \frac{1}{(a - \bar{a})^3}.$$

Somit liefert (16):

$$A' = A^2 \dot{\bar{a}} \left[\frac{1}{(a - \bar{a})^2} \frac{1}{(\sigma - a)^2} + \frac{2}{(a - \bar{a})^3} \frac{1}{\sigma - a} - \frac{1}{(a - \bar{a})^3} \frac{1}{\sigma - i} - \frac{1}{(a - \bar{a})^3} \frac{1}{\sigma + i} \right]$$

$$- A^2 \dot{\bar{a}} \left[\frac{1}{(i + a)^2} \frac{1}{(\sigma + i)^2} + \frac{2}{(i + a)^3} \frac{1}{\sigma + i} + \frac{1}{(i + a)^2} \frac{1}{(\sigma - a)^2} - \frac{2}{(i + a)^3} \frac{1}{\sigma - a} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(a - \bar{a})^2} \frac{1}{(\sigma - a)^2} + \frac{2}{(a - \bar{a})^3} \frac{1}{\sigma - a} - \frac{1}{(a - \bar{a})^3} \frac{1}{\sigma + i} - \frac{1}{(a - \bar{a})^3} \frac{1}{\sigma - i} \right].$$

und bei Einsetzen von $a = p - iq$ und Integration:

$$A = \frac{A^2}{4} \frac{\dot{q}}{q^3} \ln \frac{(\sigma - a)^2}{\sigma^2 + 1} + \frac{2A^2 \dot{a}}{(i + a)^3} \ln \frac{\sigma - a}{\sigma + i} + \frac{A^2 \dot{p}}{2q^2} \frac{1}{\sigma - a} + \frac{A^2 \dot{a}}{(i + a)^2} \left(\frac{1}{\sigma + i} + \frac{1}{\sigma - a} \right).$$

Es ist nicht schwierig nun dieser Strömung infolge der Deformation des Profils eine aus Verschiebung und Drehung resultierende zu überlagern. — Es seien v und $\dot{\alpha}$ die Geschwindigkeiten (vgl. Abs. 6). Dann findet man direkt:

$$X_1 = iA\bar{v} \frac{1}{\sigma - a} - iAv \frac{1}{\sigma + i} \dots \dots \dots (25).$$

Für die Berechnung von X_2 hat man zz^* zu bilden, in Partialbrüche zu zerlegen und den regulären Anteil zu nehmen. Dies ergibt nach (22):

$$X_2 = iA^2 \dot{\alpha} \left[\left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{i + a} \right) \frac{1}{\sigma + i} + \left(\frac{1}{2iq} + \frac{1}{i + a} \right) \frac{1}{\sigma - a} \right] \dots \dots \dots (26).$$

Es ist dann die gesamte Strömungsfunktion:

$$w = A + X_1 + X_2.$$

Eingegangen am 24. Dezember 1951.

Über die Charakteristiken des vollständigen ebenen Plastizitätsproblems

Von Hilda Geiringer, derzeit Rom

Ein allgemeines komplettes Problem für ein isotropes ideal plastisches Material wird so angesetzt, daß Spannungscharakteristiken und Geschwindigkeitscharakteristiken nicht zusammenfallen, und weder diese noch jene die Winkel der Hauptlinien halbieren. Für diesen Ansatz werden die Richtungsfelder der Charakteristiken, so wie die sämtlichen Kompatibilitätsbedingungen in einfacher Weise abgeleitet; u. a. mit dem Ziele einer Analyse des „speziellen“ Problems, bei dem diese Kurvennetze zusammenfallen.

A general complete problem for an isotropic ideally plastic material is put in such a way that the characteristics of tension and celerity do not coincide and neither these nor those halve the angles of the main lines. For this purpose the fields of direction of the characteristics as well as all conditions of compatibility are derived in a simple way, among others with the purpose of obtaining an analysis of the „special“ problem at which these nets of curves coincide.

Un problème général complet pour un matériel isotrope idéalement plastique est tellement posé que les caractéristiques de tension et les caractéristiques de vitesse ne coïncident pas et que ni celles-ci ni celles-là ne partagent en deux les angles des lignes principales. Pour ce but les champs de direction des caractéristiques ainsi que toutes les conditions de compatibilité sont dérivés d'une manière simple, parmi d'autres avec le but d'une analyse du problème „spécial“, auquel ces réseaux de courbes coïncident.

Общей полной проблеме для изотропного идеального пластичного материала придается такой вид, что характеристики напряжений и характеристики скоростей не совпадают, и ни те, ни другие не являются биссектрисами углов главных линий. Для этого приема выводятся простым способом поля направлений характеристик, а также все условия совместимости, — м. пр., с. целью анализа „частной“ проблемы, при которой эти сети кривых совпадают.

Einleitung

Das fast ausschließlich studierte und in Anwendungen zugrunde gelegte vollständige Gleichungssystem eines ideal plastischen ebenen Körpers besteht aus sechs Gleichungen für die folgenden sechs Unbekannten: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau$ sind die Komponenten des ebenen Spannungstensors Σ ; v_x, v_y die der Fließgeschwindigkeit und k eine nicht negative Proportionalitätsfunktion, die von Punkt zu Punkt variieren mag. Für diese gelten

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (a)$$

$$q \equiv (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = \text{const} \quad \dots \dots \dots (b)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = k \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = k \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \tau = \frac{k}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad \dots \dots \dots (c).$$

Bezeichnet man mit J die Einheitsmatrix, mit $s = -p = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ die mittlere Spannung, so sind die Größen links in (c) gleich den Komponenten des „reduzierten Spannungstensors“ $\Sigma' = \Sigma + pJ$. Die Ableitungen, die rechts in (c) auftreten, sind die Komponenten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit \dot{E} und (c) kann somit kurz in der Tensorform

$$\Sigma' = k \dot{E} \quad \dots \dots \dots (c)$$

geschrieben werden.

Die drei Tensoren, Σ , Σ' , und \dot{E} haben in jedem Punkt dieselben Hauptrichtungen. Die Linien, die in jedem Punkt die Winkel dieser Hauptrichtungen halbieren werden Gleitlinien genannt. Sie besitzen eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften¹⁾. Im folgenden werden wir sehen, daß diese Gleitlinien in gewissem Sinne die Rollen von drei Kurvennetzen in sich vereinen; wir bezeichnen diese als: 1. Die 45° Linien, 2. Die Charakteristiken der Spannungsgleichungen, 3. die Charakteristiken der Geschwindigkeitsgleichungen.

In den letzten Jahren wurde ein allgemeineres Problem behandelt, bei dem an Stelle von (b) eine weitgehend willkürliche Beziehung $f(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = 0$ tritt²⁾. Betrachtet man die Gl. (a) zusammen mit dieser allgemeinen „Fließbedingung“, so zeigt sich zunächst, daß die 45° Linien (so nennen wir jetzt die Linien, die die Winkel der Hauptrichtungen in jedem

¹⁾ Siehe z. B. H. Geiringer, *Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes*. (Mémorial des Sciences Mathém. 86) Gauthier Villars, Paris 1937. Oder R. Hill, *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Clarendon Press 1950.

²⁾ Für einige Literaturangaben siehe H. Geiringer, *Proc. Nation. Acad. of Sciences*, Vol. 37, No. 4, p. 214—220. April 1951, sowie eine im Druck befindliche Arbeit desselben Autors, in *Proceedings, First U. S. Nation. Congress of Applied Mechanics*. Chicago 1952.

Punkte halbieren), im allgemeinen mit den „Spannungscharakteristiken“ nicht mehr übereinstimmen. Dies ist nur dann der Fall, wenn für f , identisch in den Argumenten, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = 0$ gilt. Ferner werden die „Spannungscharakteristiken“ mit den „Geschwindigkeitscharakteristiken“ nur dann zusammenfallen, wenn in (c), links, an Stelle von Σ' der „derivierte Tensor“ von f tritt, d. i. ein symmetrischer Tensor, den wir mit Grad f bezeichnen, und der die Komponenten $\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}$ besitzt.

Wir wollen in dieser Arbeit das hier angedeutete allgemeine Problem behandeln, in dem die genannten drei Kurvenscharen im allgemeinen gesondert auftreten, (§ 1), und die Grundeigenschaften dieser Kurven feststellen. Als solche betrachten wir hier: A) Richtungsbedingungen der Charakteristiken (§ 2 und § 5), B) Kompatibilitätsbedingungen entlang den Charakteristiken (§ 4), C) gewisse einfache Eigenschaften der 45° Linien (§ 3). Abgesehen von dem Interesse an diesem allgemeinen Problem scheint es uns, daß es für das Verständnis des speziellen Problems (a), (b), (c) nützlich ist wenn man die Eigenschaften seiner Gleitlinien nach obigen Gesichtspunkten analysiert. Es wurde Gewicht darauf gelegt, die Beweise möglichst kurz und durchsichtig zu gestalten, einerseits um die mathematischen Eigenschaften unseres allgemeinen Systems ins Licht zu setzen, anderseits um gewisse Zusammenhänge, und gewisse Unterschiede klarzustellen.

Die Richtungsbedingungen der Charakteristiken folgen sachlich aus der Charakteristiken-theorie partieller Differentialgleichungen. Es schien uns jedoch von Interesse, die elegante geometrische Deutung dieser Richtungsfelder, die auf der Betrachtung der Einhüllenden gewisser Familien von „Mohr'schen Kreisen“ beruht, in die Darstellung einzubeziehen.

1. Das allgemeine Problem der ebenen Plastizitätstheorie

Wie man leicht sieht, kann man den in (c') eingeführten Tensor Σ' als derivierten Tensor der in (b) definierten quadratischen Form, q , erhalten, da z. B. $\frac{1}{4} \frac{\partial q}{\partial \sigma_x} = \sigma'_x$, usw. daher $\Sigma' = \frac{1}{4} \cdot \text{Grad } q$. Man kann also in (a), (b), (c) die Funktion q der Spannungen als „plastisches Potential“ ansehen, von dem die Beziehungen (c) abgeleitet sind. Es erscheint nützlich in der Aufstellung eines allgemeinen Problems, dem eine allgemeine Fließbedingung $f(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = 0$ zugrundegelegt wird, den entsprechenden Ansatz wieder von einem plastischen Potential abzuleiten. Anderseits wollen wir nicht von Anfang an dieses Potential, h , mit der Fließfunktion, f , identifizieren.

Da wir uns hier mit einem isotropen Material beschäftigen, müssen wir annehmen, daß sowohl f wie h Invarianten des Spannungstensors sind, oder, was dasselbe ist, Funktionen der Hauptspannungen, σ_1 und σ_2 ; (wir wollen im folgenden $\sigma_2 \geq \sigma_1$ voraussetzen). Wir setzen daher das folgende allgemeine System an, wobei die Gl. (1) mit (a) übereinstimmen:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = F(\sigma_1, \sigma_2) = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{Grad } h = k \dot{E}, \quad \text{mit } k \geq 0 \quad \dots \dots \dots (3),$$

wobei

$$h(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = H(\sigma_1, \sigma_2)$$

und

$$\text{Grad } h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \sigma_x} & \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \tau} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \tau} & \frac{\partial h}{\partial \sigma_y} \end{pmatrix}.$$

Hier geht nun zunächst (3) durch Elimination von k in die zwei Gleichungen

$$\frac{\partial h}{\partial \sigma_x} : \frac{\partial h}{\partial \tau} : \frac{\partial h}{\partial \sigma_y} = \dot{\epsilon}_x : \dot{\gamma} : \dot{\epsilon}_y \quad \dots \dots \dots (3')$$

über, wobei in üblicher Weise $\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}$, $\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}$. Anderseits kann aus

(1) und (2) in vielfacher Weise ein System von zwei Differentialgleichungen für zwei geeignet gewählte Bestimmungsstücke des Spannungstensors durch Elimination gewonnen werden,

so daß dann unser gesamtes System aus vier partiellen Differentialgleichungen besteht. — Bemerken wir noch, daß die Annahme $f \neq h$ nicht notwendig eine komplizierte oder „ausgefallene“ Annahme darstellt. Wenn man z. B. das System (a), (c) mit irgendeiner von (b) verschiedenen Fließbedingung kombiniert, (z. B. mit einer der Bedingungen, die aus der dreidimensionalen Mises'schen oder aus der dreidimensionalen Saint Venantschen Fließbedingung, für $\sigma_3 = 0$, d. h. für „plane stress“, folgen), so ist $h = q$ und $f \neq h$.

2. Charakteristiken des kompletten Problems

Wenn wir nun darangehen, die Charakteristiken zu bestimmen, so zeigt es sich, daß eine bemerkenswerte Symmetrie in der Struktur unseres Systems am besten hervortritt, wenn man zunächst in (1), (2) gar nichts eliminiert, sondern nur (2) nach x (oder y) differenziert. (Es ist leicht zu sehen, daß so eine Differentiation nur eine triviale Charakteristik, parallel einer der Achsen hinzufügt, aber sonst nichts ändert.) Wir haben dann im ganzen fünf Gleichungen von der Form:

$$\sum_k^{1 \dots 5} \left(a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5),$$

wobei die u_k für $\sigma_x, \sigma_y, \tau, v_x, v_y$ stehen. Die entsprechenden Determinante fünfter Ordnung, die die charakteristischen Richtungen $\lambda: \mu = dx: dy$ liefert, ist dann

$$|\mu a_{ik} - \lambda b_{ik}| = 0$$

deren allgemeines Element $\mu a_{ik} - \lambda b_{ik}$ in der i -ten Zeile und k -ten Spalte steht. Es ist sofort zu sehen, daß in dieser Determinante in unserem Falle an vierter und fünfter Stelle der ersten drei Zeilen Nullen stehen, und ebenso an erster, zweiter und dritter Stelle der beiden letzten Zeilen. Sie zerfällt also in das Produkt zweier Determinanten und es ist somit gezeigt, daß wir sämtliche Charakteristiken unseres kompletten Systems erhalten, wenn wir das System (1), (2) einerseits, das System (3) andererseits gesondert betrachten.

Führen wir die Abkürzungen

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau} = f_2, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = f_3$$

ein, so ist die charakteristische Determinante von (1), (2) durch

$$\begin{vmatrix} \mu & -\lambda & 0 \\ 0 & \mu & -\lambda \\ \mu f_1 & \mu f_2 & \mu f_3 \end{vmatrix} = \mu(\lambda^2 f_1 + \mu \lambda f_2 + \mu^2 f_3) = 0 \quad \dots \quad (4)$$

gegeben; also, abgesehen von der durch die Differentiation eingeführten Schar $\mu = \text{const}$, erhalten wir für die Charakteristiken der Spannungsgleichungen (1), (2) die Beziehung $\lambda^2 f_1 + \lambda \mu f_2 + \mu^2 f_3 = 0$. Setzen wir $\lambda = \cos \gamma$, $\mu = \sin \gamma$, wo γ den Winkel einer Charakteristik mit der x -Achse bezeichnet, so wird

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \cos^2 \gamma + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) \sin \gamma \cos \gamma + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \sin^2 \gamma = 0 \quad \dots \quad (4')$$

Diese Gleichung hat zwei reelle Lösungen, wenn $f_1 f_3 - f_2^2/4 \leq 0$. Bezeichnet man die charakteristischen Richtungen mit m , so sieht man, daß die linke Seite von (4') nichts anderes ist als die Komponente d_{mm} des Tensors $D = \text{Grad } f$ in der m -Richtung, (Komponente in der m -Richtung des der m -Richtung zugeordneten Vektors \vec{d}_m .) Die Richtung der Spannungscharakteristiken ist also durch die Gleichung

$$(\text{Grad } f)_{mm} = 0 \quad \dots \quad (5)$$

definiert. Führt man die Hauptwerte des Tensors $\text{Grad } f$ ein, nämlich aus (2) $\frac{\partial W}{\partial \sigma_i} = F_i$, ($i = 1, 2$), und bezeichnet mit φ den Winkel einer Charakteristik mit der ersten Hauptrichtung des Tensors $\text{Grad } f$, so erscheint (4') in der Form

$$F_1 \cos^2 \varphi + F_2 \sin^2 \varphi = 0 \quad \dots \quad (4'')$$

woraus

$$\tan^2 \varphi = -\frac{F_1}{F_2} \quad \dots \quad (6)$$

folgt. Dies definiert zwei reelle, voneinander verschiedene Richtungen, falls $F_1 F_2 < 0$. Eine elementare direkte Ausrechnung zeigt, daß die Haupttrichtung des Tensors $\text{Grad } f$ mit denen von Σ zusammenfallen; es gilt somit für die Winkel γ, γ' der Charakteristiken mit der x -Achse, wenn ϑ den Winkel der ersten Spannungshaupttrichtung mit der x -Achse bezeichnet

$$\gamma = \vartheta + \varphi, \quad \gamma' = \vartheta - \varphi \quad \dots \dots \dots (7).$$

Betrachten wir nun die Geschwindigkeitsgleichungen (3) und wählen, mit $\frac{\partial h}{\partial \sigma_x} = h_1$, usw., z. B.

$$h_3 \dot{\epsilon}_x - h_1 \dot{\epsilon}_y = 0, \quad h_2 \dot{\epsilon}_x - h_1 \gamma = 0 \quad \dots \dots \dots (3'),$$

so lautet die zugehörige charakteristische Determinante

$$\begin{vmatrix} h_3 \mu & h_1 \lambda \\ h_2 \mu + h_1 \lambda & -h_1 \mu \end{vmatrix} = -h_1 (\lambda^2 h_1 + \lambda \mu h_2 + \mu^2 h_3) = 0 \quad \dots \dots \dots (8).$$

Es tritt also jetzt neben (4') die Gleichung

$$\frac{\partial h}{\partial \sigma_x} \cos^2 \delta + \frac{\partial h}{\partial \tau} \cos \delta \sin \delta + \frac{\partial h}{\partial \sigma_y} \sin^2 \delta = 0 \quad \dots \dots \dots (8'),$$

welche zwei reelle Wurzeln hat, falls $h_1 h_3 - h_2^2/4 \leq 0$. Die Geschwindigkeitscharakteristiken sind also die Richtungen, nennen wir sie n -Richtungen, für die die Komponente $G_{nn} = (\text{Grad } h)_{nn}$ von $G = \text{Grad } h$ verschwindet

$$(\text{Grad } h)_{nn} = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

und wenn wir (8') in der Form

$$H_1 \cos^2 \psi + H_2 \sin^2 \psi = 0 \quad \dots \dots \dots (8'')$$

schreiben, (ψ Winkel der ersten Haupttrichtung mit einer Charakteristik), so folgt

$$\tan^2 \psi = -\frac{H_1}{H_2} \quad \dots \dots \dots (10)$$

und

$$\delta = \vartheta + \psi, \quad \delta' = \vartheta - \psi \quad \dots \dots \dots (11)$$

für die Winkel der Geschwindigkeitscharakteristiken mit der x -Achse. Es ist klar, daß $\varphi = \psi$, d. h. Spannungs- und Geschwindigkeitscharakteristiken identisch, dann und nur dann, wenn $h = f$.

Es ist sehr bemerkenswert, daß die so verschieden aussehenden Gleichungsgruppen (1), (2) einerseits, und (3) andererseits, die analogen Gleichungen (4) und (8) ergeben. Wir wollen aber noch auf einen andern Umstand als den der Struktur der betreffenden Gleichungen und Determinanten hinweisen: Die Gleichungen (1), (2) sind nicht linear, da die Koeffizienten in der differenzierten Gleichung (2) die Spannungen enthalten, d. h. die abhängig Variablen; die Koeffizienten enthalten aber nur die abhängig Variablen und gar keine unabhängig Veränderlichen; dementsprechend treten in (4) nur Spannungen auf. Hingegen sind die Geschwindigkeitsgleichungen (3') linear, insofern dort die Koeffizienten keineswegs die v_x, v_y enthalten, sondern wieder nur Spannungen (die wir nun als gegebene Funktionen der x, y betrachten). Daher treten in (8) wieder nur Spannungen auf.

Der Winkel φ , (bzw. ψ) wird dann und nur dann gleich 45° , also orthogonales Charakteristikenfeld, wenn $-F_1/F_2 = 1$ (bzw. $-H_1/H_2 = 1$) oder, $F_1 + F_2 = 0$ (bzw. $H_1 + H_2 = 0$). Wir nennen kurz eine Funktion $f(\sigma_x, \sigma_y, \tau) = F(\sigma_1, \sigma_2)$ orthogonal, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = 0 \quad \dots \dots \dots (12)$$

identisch für alle Werte der Argumente, und haben somit das Resultat: Nur für eine orthogonale Fließfunktion (ein orthogonales Potential) stimmen die Spannungscharakteristiken (die Geschwindigkeitscharakteristiken) mit den 45° Linien überein. Wenn wir im folgenden von dem „allgemeinen“ Problem (1), (2), (3) sprechen, wollen wir, wenn nicht anders bemerkt, voraussetzen, daß weder f noch h orthogonal sind. Falls beide orthogonal sind, unterscheidet sich das Problem nicht wesentlich von dem speziellen Problem (a), (b), (c).

3. Die 45° Linien.

Für jeden symmetrischen Tensor gibt es zwei stets reelle, die Winkel der Haupttrichtungen halbierenden Richtungen, sagen wir μ und ν , so daß bezüglich dieser die Werte in der Haupt-

diagonale des Tensors einander gleich sind, und die in der Nebendiagonale, ihr Maximum erreichen. Die ersteren sind gleich der halben Summe, die letzteren gleich der halben Differenz der beiden Hauptwerte, also z. B. für den Tensor \dot{E} : $\dot{\epsilon}_{\mu\mu} = \dot{\epsilon}_{\nu\nu} = \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)$ und dies ist gemäß (c) im Falle des speziellen Problems gleich Null, während $\dot{\gamma}_{\mu\nu}$ gleich dem Größtwert aller $\dot{\gamma}$ im betrachteten Punkt. Diesen Eigenschaften verdanken die „Gleitlinien“ ihren Namen. Im klassischen Fall des Problems (a), (b), (c) ist also bezüglich der 45° Linien, die wir hier Gleitlinien nennen, die Normaldehnung $\dot{\epsilon}_{\mu\mu} = \dot{\epsilon}_{\nu\nu} = 0$ und sowohl die Schiebung $\dot{\gamma}_{\mu\nu}$ wie die Schubspannung $\dot{\tau}_{\mu\nu}$ erreichen für diese Richtungen ihren Größtwert.

Wir sehen nun sofort, daß dies im nicht orthogonalen, allgemeinen Fall anders ist. Zunächst bemerken wir, daß es auch hier in jedem Punkt ein und nur ein Paar von 45° Linien gibt, da, wie oben erwähnt, die Hauptrichtungen für die Tensoren Σ und Grad h , somit auch für Σ und \dot{E} übereinstimmen. Bezeichnen wir die 45° Richtungen wieder mit μ, ν so gilt wieder $\dot{\epsilon}_{\mu\mu} = \dot{\epsilon}_{\nu\nu} = \frac{1}{2}(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)$, dies ist nun aber nicht gleich Null, da hier $k(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) = H_1 + H_2 \neq 0$. Daher: Im Falle des allgemeinen Problems (1), (2), (3) haben in jedem Punkt die auf die 45° Linien als Achsen bezogene Schiebung $\dot{\gamma}_{\mu\nu}$, sowie Schubspannung $\tau_{\mu\nu}$ ihr Maximum, während die beiden Dehnungen $\dot{\epsilon}_{\mu\mu}$ und $\dot{\epsilon}_{\nu\nu}$ immer noch einander gleich, aber nicht mehr gleich Null sind.

Wir werden sogleich sehen, daß letztere Eigenschaft nun von den 45° Linien auf die Geschwindigkeitscharakteristiken übergeht. In der Tat entnehmen wir aus (3) und (9) daß

$$\dot{\epsilon}_{nn} = 0 \quad (13).$$

Die Dehnung längs einer Geschwindigkeitscharakteristik ist Null. Diese Aussage gehört allerdings systematisch schon in den nächsten Abschnitt.

4. Die Kompatibilitätsbedingungen

In jedem Fall, auch wenn $f = h$, also die beiden Charakteristikennetze identisch, existieren zwei Gruppen von je zwei Kompatibilitätsbedingungen; wenn $f = h$ gelten längs jeder Charakteristik zwei Bedingungen, deren eine sich auf die Spannungen, die andere auf die Geschwindigkeiten bezieht, entsprechend der Doppelwurzel λ/μ der charakteristischen Determinante fünfter Ordnung.

Um die Spannungsrelationen in einer Form zu erhalten, die der des klassischen Falls ähnlich ist, führen wir im Anschluß an v. Mises³⁾ als Spannungsveränderliche ϑ und s ein, wobei ϑ , wie bisher, den Winkel zwischen erster Hauptrichtung und x -Achse bedeutet, während s irgend eine symmetrische Funktion von σ_1 und σ_2 ist, die sich zur parametrischen Darstellung der Fließbedingung $F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ eignet. Sei also

$$\sigma_1 = \sigma_1(s), \quad \sigma_2 = \sigma_2(s) \quad (14)$$

eine Parameterdarstellung von $F = 0$, und führen wir, mit $\frac{d\sigma_1}{ds} = \sigma'_1, \frac{d\sigma_2}{ds} = \sigma'_2$ die Abkürzungen

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma'_1} = p \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma'_2} = q \quad (15)$$

ein, und bezeichnen schließlich mit $\partial/\partial\xi, \partial/\partial\eta$ Ableitungen in Richtung der ersten und zweiten Hauptrichtung, so erhält man an Stelle von (1) und (2) die Gleichungen³⁾

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} = p \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial s}{\partial \eta} = q \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \quad (16).$$

Die Charakteristiken von (16) müssen natürlich mit den in (4) usw. gefundenen zusammenfallen. In der Tat ergibt sich aus (16) wenn φ dieselbe Bedeutung wie bisher hat

$$\tan^2 \varphi = \frac{p}{q} = \frac{\sigma'_2}{\sigma'_1} = -\frac{F_1}{F_2} \quad (16'),$$

wie in (6). Bemerken wir noch, daß das System (16) „reduzibel“ ist (in einer von R. Courant eingeführten Bezeichnung), da es aus zwei homogenen Gleichungen besteht, die in den Koeffizienten nur die abhängigen Variablen enthalten (in unserem Fall nur s allein). Man kann daher die Kompatibilitätsbedingungen auch finden, indem man aus (16) ein neues lineares System ableitet, in dem s und ϑ die unabhängigen, ξ und η die abhängig Variablen sind. Diese

³⁾ Reissner Anniversary Volume. Ann. Arbor. Mich. p. 415—429.

neuen Gleichungen haben Charakteristiken Γ, Γ' in der $s - \vartheta$ Ebene, welche die Bilder der Charakteristiken C, C' der ursprünglichen Gleichungen (16) in der x, y Ebene sind. Als Resultat folgt die Richtungsbeziehung in der $s - \vartheta$ Ebene

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{pq}} \quad \dots \dots \dots (17),$$

aus der die Kompatibilitätsbeziehungen entlang einer C , oder C' folgen: Bezeichnet man mit dm, dm' Linienelemente einer C oder C' , so sind diese Beziehungen

$$\frac{d\vartheta}{dm} = \frac{1}{\sqrt{pq}} \frac{ds}{dm}, \quad \frac{d\vartheta}{dm'} = -\frac{1}{\sqrt{pq}} \frac{ds}{dm'} \quad \dots \dots \dots (17')$$

oder mit

$$\int \frac{ds}{\sqrt{pq}} = G(s)$$

$$\vartheta - G(s) = \text{const, entlang } C; \quad \vartheta + G(s) = \text{const, entlang } C' \quad \dots \dots \dots (17'')$$

Im Spezialfall der Bedingung (b) folgt mit $s = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 K$, $\sigma_1 = Ks - K$, $\sigma_2 = Ks + K$, $p q = (\sigma_2 - \sigma_1)^2 / \sigma_1' \sigma_2' = 4$, $G(s) = \frac{1}{2} s$, und somit die bekannten Beziehungen: $\vartheta \pm p/2 K = \text{const}$, entlang der Schar der ersten, bzw. zweiten „Gleitlinien“, Beziehungen, die als Ausgangspunkt der sog. Hencky-Prandtl'schen Gleitliniensätze angesehen werden können. Diese Hencky-Prandtl'schen Sätze sprechen also geometrische Eigenschaften der Spannungscharakteristiken des klassischen Problems aus.

Noch einfacher ist die Aufstellung der Kompatibilitätsbeziehungen des Geschwindigkeitsproblems (3). Diese sind nämlich bereits in (13) ausgesprochen. Aus (13) ergeben sich die entscheidenden Gleichungen für die Geschwindigkeiten: Aus

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{nn} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \cos^2 \delta + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sin \delta \cos \delta + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sin^2 \delta \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \cos \delta + \frac{\partial v_x}{\partial y} \sin \delta \right) \cos \delta + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \cos \delta + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sin \delta \right) \sin \delta \end{aligned}$$

folgt, wenn d/dn Differentiation in der n -Richtung bedeutet, und die n -Richtung mit der x -Achse den Winkel δ , die n' -Richtung den Winkel δ' einschließt

$$\dot{\epsilon}_{nn} = \frac{dv_x}{dn} \cos \delta + \frac{dv_y}{dn} \sin \delta = 0, \quad \dot{\epsilon}_{n'n'} = \frac{dv_x}{dn'} \cos \delta' + \frac{dv_y}{dn'} \sin \delta' = 0 \quad \dots \dots (18),$$

eine an sich interessante Beziehung (s. ²⁾), oder auch, wenn wir mit K, K' die Geschwindigkeitscharakteristiken in der x, y -Ebene bezeichnen

$$dv_y/dv_x = -\cot \delta, \text{ entlang } K; \quad dv_y/dv_x = -\cot \delta', \text{ entlang } K' \quad \dots \dots \dots (19),$$

wobei δ und δ' durch (11) gegeben sind. Und weiters aus

$$\frac{d}{dn} (v_x \cos \delta + v_y \sin \delta) = \left(\frac{dv_x}{dn} \cos \delta + \frac{dv_y}{dn} \sin \delta \right) + (v_y \cos \delta - v_x \sin \delta) \frac{d\delta}{dn}$$

folgt gemäß (18), wenn man nun mit v (oder v') die Richtung normal zu n (oder n') bezeichnet, $v \perp n$, $v' \perp n'$:

$$\frac{d}{dn} (v_n) - v_v \frac{d\delta}{dn} = 0, \quad \frac{d}{dn'} (v_{n'}) - v_{v'} \frac{d\delta'}{dn'} = 0 \quad \dots \dots \dots (20).$$

Also entlang K oder K' beziehungsweise:

$$dv_n - v_v d\delta = 0, \quad dv_{n'} - v_{v'} d\delta' = 0 \quad \dots \dots \dots (21).$$

Diese wichtigen Gleichungen reduzieren sich im orthogonalen Spezialfall ⁴⁾, wenn die Richtungen n und n' beziehungsweise mit v' und mit $-v$ zusammenfallen, auf die von mir 1930 angegebenen Grundgleichungen des Geschwindigkeitsproblems.

$$\frac{\partial v_n}{\partial \alpha} - v_v = 0 \quad \frac{\partial v_v}{\partial \beta} + v_n = 0 \quad \dots \dots \dots (22')$$

Wir gehen auch hier auf weitere Ausführung und Diskussion der Beziehungen (20), (21) nicht ein.

⁴⁾ Geiringer, H. (Pollaczek), Berichte III. Intern. Kongreß für Techn. Mech., Stockholm (1930), Bd. 2, 185—190.

Bemerken wir noch, daß sich zeigen läßt, daß, wenn zwei verschiedene Spannungsfelder entlang einer (Spannungs)-Charakteristik zusammenstoßen, die Spannungen selbst bei diesem Übergang sprungweise Unstetigkeiten nicht aufweisen können; dies ist nur für deren Ableitungen möglich. Hingegen ist es zulässig, daß an einer (Geschwindigkeits)-Charakteristik sich die tangentielle Komponente der Geschwindigkeit beim Übergang sprungweise ändert.

5. Charakteristische Richtungen und Mohr'sche Kreise

Wir wollen nun eine Eigenschaft der charakteristischen Richtungen zeigen, die auch zu deren Definition dienen könnte. Die sogenannten „Mohr'schen Kreise“, die sich im ebenen Fall auf einen einzigen Kreis reduzieren, bilden ein bequemes und sehr suggestives Mittel zur Darstellung eines symmetrischen Tensors. Der Vollständigkeit halber geben wir kurz die Tatsachen an. Jeden Tensor (doch denken wir an den Spannungstensor Σ) ordnet bekanntlich jeder Richtung ν einen Vektor \vec{p}_ν zu (Bild 1b), der sich in eine Normalspannung $p_{\nu\nu} = \sigma$, in Richtung von ν und eine darauf senkrechte Schubspannung τ zerlegen läßt. Wenn man nun jeden dieser Vektoren \vec{p}_ν durch einen Punkt darstellt, dessen kartesische Koordinaten, bei beliebig gewähltem Anfangspunkt, σ und τ sind, so ist nach Mohr der Ort all dieser Punkte für alle möglichen Richtungen ν ein Kreis (Bild 1a) mit Zentrum ($\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$, 0) und Radius gleich

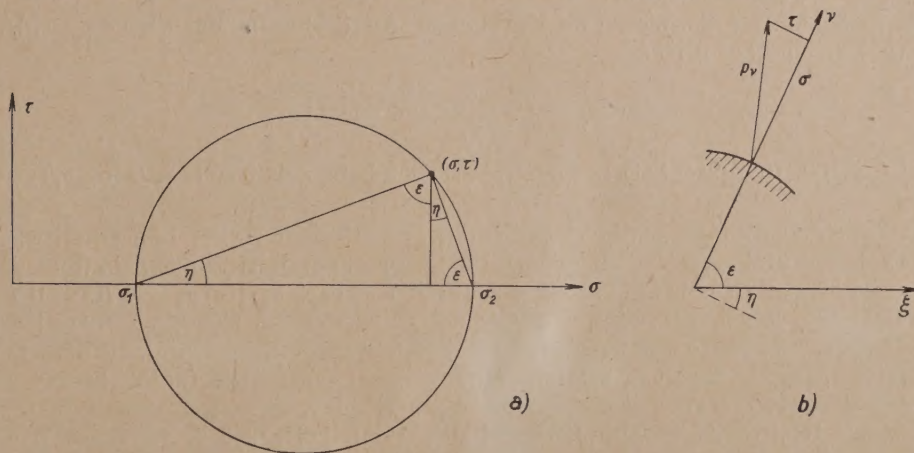


Bild 1

$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)$. Um dies zu zeigen, bezeichnen wir mit ε den Winkel der ν -Richtung und der ersten Hauptrichtung. Dann gilt bekanntlich

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \varepsilon + \sigma_2 \sin^2 \varepsilon & \tau &= (\sigma_2 - \sigma_1) \cos \varepsilon \sin \varepsilon \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varepsilon & &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

woraus sofort die Behauptung, nämlich

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right)^2 \dots \dots \dots (23')$$

folgt. Der Hauptwert dieser geometrischen Darstellung ist, daß sie sogleich (s. Bild 1a) zu jedem Punkte, d. h. zu jedem σ , τ , den gemäß (23) zugehörigen Winkel ε liefert, und umgekehrt. In der Tat sehen wir, daß der in (23) eingeführte Winkel ε mit dem im Bild so bezeichneten zusammenfällt. Für den Winkel im Bild gilt nämlich

$$\tan \varepsilon = \frac{\tau}{\sigma_2 - \sigma} = \frac{\sigma - \sigma_1}{\tau} \dots \dots \dots (24)$$

und daraus

$$\tan^2 \varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma} \dots \dots \dots (25)$$

und, immer für den Winkel in (25), $\cos^2 \varepsilon = \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2}$, $\sin^2 \varepsilon = \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}$; man sieht aber sofort, daß diese Werte in (23) eingesetzt diese Gleichung identisch befriedigen. — Soweit sind dies wohl-bekannte Tatsachen.

Nun betrachten wir die eindimensionale Familie von Mohrschen Kreisen, deren Konstante, σ_1 und σ_2 , eine gegebene Gleichung $G(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ befriedigen. Diese Kreise haben eine Einhüllende, die mit jedem Kreis der Familie (mindestens) einen reellen oder imaginären Berührungspunkt gemein hat. Im Fall reellen Kontakts mit einem Kreis, Q , hat der Kontaktpunkt Koordinaten σ, τ und dazugehörige Winkel ε und η . Wir wollen nun zeigen, daß, wenn wir $G(\sigma_1, \sigma_2)$ mit unserer Plastizitätsfunktion F identifizieren, dann $\eta = 90^\circ - \varepsilon = \varphi$ ist, wo φ der in (6) eingeführte Winkel der Spannungscharakteristik mit der ersten Haupttrichtung ist, während im Falle, daß für G das plastische Potential H tritt, für den entsprechenden Berührungspunkt $\eta = \psi$ gilt, wo ψ der die Richtung der Geschwindigkeitscharakteristiken definierende, in (10) eingeführte Winkel ist. Der folgende Beweis ist wohl auf die einfachsten Elemente reduziert:

Benutzen wir, wie in (14), $\sigma_1 = \sigma_1(s)$, $\sigma_2 = \sigma_2(s)$ als Parameterdarstellung von $F(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, und gleichzeitig s als Parameter in der Darstellung unserer eindimensionalen Familie von Kreisen. Dann ergibt Differentiation von

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 + \tau^2 = 0 \quad (23')$$

nach s

$$\sigma(\sigma'_1 + \sigma'_2) = \sigma_1\sigma'_2 + \sigma_2\sigma'_1 \quad (26).$$

Diese beiden Gleichungen definieren die Enveloppe. Aus (26) entnehmen wir $(\sigma_2 - \sigma)/(\sigma - \sigma_1)$, was nach (25) gleich $\tan^2 \eta$ ist:

$$\tan^2 \eta = \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma - \sigma_1} = \frac{\sigma'_2}{\sigma'_1} = -\frac{F_1}{F_2}$$

und somit ist, gemäß (6), unser Satz bewiesen; natürlich kann genau so bez. $H(\sigma_1, \sigma_2)$ geschlossen werden.

Nicht reeller Berührungspunkt entspricht dem Fall nicht reeller Charakteristiken (elliptischer Fall). Betrachtet man eine allgemeine Fließbedingung, so ist es möglich, (man denke, um ein konkretes Beispiel zu haben, etwa an die durch $F = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 - 4K^2 = 0$ definierte Schar von Kreisen), daß zunächst für eine stetige Aufeinanderfolge von Kreisen auf jedem Kreis zwei reelle Berührungspunkte liegen (entsprechend dem hyperbolischen Fall), die dann allmählich zusammenrücken, bis sie für einen bestimmten Kreis zusammenfallen (parabolischer Fall), und sodann folgen Kreise, die ganz innerhalb der Einhüllenden, ja sogar innerhalb des letzten „parabolischen“ Kreises liegen (elliptischer Fall). (Man betrachte z. B. obiges Beispiel mit $\sigma_1 = s - \sqrt{(4-s^2)/3}$, $\sigma_2 = s + \sqrt{(4-s^2)/3}$. Verfolgen wir die einzelnen Mohrschen Kreise für $0 \leq s \leq 2$; beginnend mit einem Kreis, dessen Mittelpunkt im Nullpunkt ist und radius gleich $\frac{2}{\sqrt{3}}$, rücken die Mittelpunkte nach rechts, während die Radien kleiner werden, bis, für $s = \sqrt{3}$, der Mittelpunkt die Abszisse $4/\sqrt{3}$, hat und der entsprechende Radius gleich $1/\sqrt{3}$ ist; die nun folgenden Kreise, die man für $\sqrt{3} < s \leq 2$ erhält, liegen ganz innerhalb dieses letzten Kreises. Dieser letzte Kreis hat nur einen Berührungspunkt, der auf der σ -Achse liegt, mit der Enveloppe gemeinsam, während die Kreise mit kleinerem s je zwei, symmetrisch zur σ -Achse gelegene, Berührungspunkte aufweisen. Für $-2 \leq s \leq 0$ ergibt sich eine zur τ -Achse symmetrische Konfiguration.

Der obige Beweis ist unabhängig von einem von Hill (l. c. 1), p. 295 ff). Hill zitiert an dieser Stelle einen früheren Beweis von J. Mandell (1942), der mir nicht bekannt ist, und erwähnt in diesem Zusammenhang Äußerungen von Prandtl (1920). Da diese sich jedenfalls nur auf den speziellen Fall unserer Bedingung b), $\tau_{max} = \text{const}$, beziehen, so erwähnen wir, daß in diesem Fall der in Rede stehende Satz selbstverständlich wird; denn die Einhüllende ist dann eine zur σ -Achse parallele Gerade; der stets reelle Berührungspunkt liegt stets im höchsten Punkte des betreffenden Kreises, wo $\varepsilon = \eta = 45^\circ$ ist, und andererseits ist in diesem orthogonalen Fall $\varphi = 45^\circ$. In Mohrs Bruchtheorie ist der Winkel, der dem Berührungspunkt mit der Hüllkurve aller „Grenzspannungskreise“ entspricht, der Bruchwinkel. In einem interessanten Artikel hat C. Torre⁵⁾ gezeigt, daß für diesen Winkel Gleichung (6) gilt. Dies folgt für uns natürlich aus unserem Beweis, der in gleicher Weise gilt, was auch die Bedeutung von $G(\sigma_1, \sigma_2)$ ist, ob diese eine Fließfunktion ist, oder ein plastisches Potential, oder die Grenzspannungskreise definiert. Für uns liegt aber das eigentliche Interesse in der Identität der in der Mohrschen Theorie ausgezeichneten Richtungen (definiert durch Berührungspunkt mit Hüllkurve) mit den charakteristischen

⁵⁾ Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 275 ff.

Richtungen unseres Problems. Und wieder erscheint hier der bemerkenswerte Parallelismus zwischen den so verschieden gebauten Gleichungen des Spannungs- und des Geschwindigkeitsproblems!

Zusammenfassung

In einem allgemeinen ebenen Plastizitätsproblem, bei dem Fließfunktion f und plastisches Potential h nicht zusammenfallen, und die Orthogonalitätsbedingung (12) weder für f noch für h zutrifft, spielen die folgenden drei voneinander verschiedenen Paare von Kurvenscharen eine Rolle: Die stets reellen „45° Linien“, sowie die (bei Zutreffen bestimmter Ungleichungen reellen) „Spannungscharakteristiken“ und „Geschwindigkeitscharakteristiken“. Die Richtungsfelder der beiden Charakteristikenetze sind, in voller gegenseitiger Analogie, einerseits durch (5) und (9), anderseits mittels der Hüllkurven gewisser Mohrscher Kreisscharen definiert. Entlang den 45° Linien haben Schubspannung und Schiebung ihren Größtwert; entlang den Spannungscharakteristiken gelten die der Grundgleichung der Hencky-Prandtl'schen Beziehungen entsprechenden Gleichungen (17); entlang den Geschwindigkeitscharakteristiken ist die Dehnungsgeschwindigkeit gleich Null, eine Beziehung die zu den Hauptgleichungen für die Geschwindigkeiten führt. Im speziellen klassischen Problem (a), (b), (c) fallen die drei Netze in dem Netz der sog. „Gleitlinien“ zusammen.

Eingegangen am 14. Januar 1952.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. M. Strscheletzky, Hydrodynamische Grundlagen zur Berechnung der Schiffs-schrauben. Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Betz. 257 S. mit 57 Abb. Karlsruhe 1950. Verlag G. Braun.

Der Verf. bringt eine Zusammenfassung der von ihm unter Zugrundelegung der Prandtl'schen Tragflächentheorie durchgeführten Untersuchung des dreidimensionalen Strömungsfeldes einer Schiffs-schraube. Dabei werden alle Einflüsse, wie der der Zähigkeit, der Form und Zahl der Flügel, der Strahlkontraktion, der Nabenform usw. in praktisch ausreichender Annäherung berücksichtigt. Darauf aufbauend wird an Hand zahlreicher Berechnungsbeispiele in Tabellen- und Kurvenform ein Verfahren zum Entwurf und zur Berechnung der in bezug auf die kinetischen Strahlverluste, den Profilwiderstand und die Kavitationssicherheit günstigsten Form der Schiffsschraube beschrieben, wobei nicht nur die Skelettform des Schraubenflügels vollständig bestimmt, sondern auch die tatsächliche Form der Flügelprofile durch Einführung entsprechender Quell-Senken-Systeme berücksichtigt wird.

Bei der von den allgemeinen Grundlagen der Theorie der Schiffsschrauben ausgehenden lehrbuchartigen Darstellung des Stoffs wird auch den Belangen des Praktikers weitgehend Rechnung getragen, so daß diese Neuerscheinung allgemein sehr zu begrüßen ist, wie dies auch in dem besonderen Vorwort von A. Betz zum Ausdruck kommt.

Berlin.

K. Krienes.

Prof. Dr. Oskar Becker und Prof. Dr. Jos. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik. (Geschichte der Wissenschaften II. Naturwissenschaften.) 340 S. Bonn 1951. Athenäum-Verlag. Preis geb. 10,— DM.

Der knappe zur Verfügung stehende Raum hat die Verfasser, deren erster die Geschichte der antiken Mathematik, beginnend mit der Zeit, in der klar erkennbare schriftliche Äußerungen vorhanden sind, deren zweiter die morgen- und abendländische Mathematik bis zum Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts dargestellt hat, gezwungen, eine gewisse Vertrautheit mit den in Frage kommenden Problemen vorauszusetzen. Ein ausführliches, sorgfältig angefertigtes Register ermöglicht dem Leser eine weitere Verfolgung ihn interessierender Fragen. Über

die Art wie die Verfasser ihre Aufgabe aufgefaßt haben, sagt das Vorwort: „Die Aufgabe der modernen wissenschaftsgeschichtlichen Forschung auf mathematischem Gebiet muß darin bestehen, je nach der Eigenart der vorliegenden Probleme sowohl den pragmatischen wie den morphologischen Standpunkt zur Geltung zu bringen; den ersten aus methodisch-systematischen, den zweiten aus stilgeschichtlichen Gründen. In der sinnvollen Vereinigung beider Auffassungen, die sich nicht etwa kontradiktorisch, sondern polar gegenüberstehen und demnach nur als Blickpunkte von verschiedenen Standpunkten aus gewertet sein wollen, sehen wir einen wesentlichen Teil der Aufgabe, die wir uns mit der Abfassung einer — wenn auch nur skizzenhaften — Gesamtgeschichte der mathematischen Wissenschaften von den Anfängen bis zum Beginn des 20. Jhrh. gestellt haben.“ Möge diese interessante Darstellung viele zur weiteren Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik anregen.

Dresden.

Willers.

J. L. Krames, Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer. Zweite erweiterte Aufl. mit 306 Abb. und 2 Tafeln. Wien 1952. Franz Deuticke. Preis brosch. 12,— DM; geb. 15,— DM.

An technischen Hochschulen entwickelt sich gegenwärtig notgedrungen Maßen immer deutlicher die Tendenz, das Studium der mathematischen und naturwissenschaftlichen Grundlagenfächer hinsichtlich des Stundenausmaßes stark zurückzudrängen. Die Vertreter dieser Fächer sehen sich demnach gezwungen, ihren Vortragsstoff einschneidend zu kürzen. Die Wahrung eines hochschulmäßigen Niveaus ist dabei meist nur dadurch möglich, daß man die Vorlesungen, getrennt nach den verschiedenen technischen Fachrichtungen, deren besonderen Erfordernissen tunlichst anpaßt. Für das Gebiet der Darstellenden Geometrie, die bei der genannten Entwicklung besonders stark in Mitleidenschaft gezogen wurde, stellt das vorliegende Werk den sehr erfolgreichen Versuch dar, den für die Studierenden und Ingenieure des Maschinenbaues erforderlichen Stoff in einem Band von mäßigem Umfang von Grund auf in leicht verständlich und doch wissenschaftlich gediegener und strenger Form aufzubauen. Es war dabei ein besonders glücklicher Gedanke, die Grundlagen der kinematischen

Geometrie, die heute an fast allen Technischen Hochschulen von dem Vertreter der Darstellenden Geometrie für Maschinenbau vorgetragen werden, mit einzubeziehen. Dem Verfasser, einem hervorragenden Vertreter der auf kinematischem Gebiet bekannten Wiener Schule, kamen dabei seine langjährigen Unterrichtserfahrungen an Technischen Hochschulen zu gute.

Der Zweckbestimmung für den Maschinenbau entsprechend steht inhaltlich die Behandlung der krummen Flächen in zugeordneten Normalrissen im Vordergrund, während z. B. die Perspektive nur gelegentlich gestreift und die Gesetze der axonometrischen Abbildung nur etwa in jenem Umfang entwickelt werden, wie sie zur Ausbildung der für Maschinenkonstrukteure wichtigen Fertigkeit im axonometrischen Skizzieren gebraucht werden. Die in dem Band aufgenommene Grundlage der kinematischen Geometrie der Ebene und des Raumes mit ihren Anwendungen

auf die Aufgaben der Verzahnungstheorie setzen den Leser in den Stand, die bewegungsgeometrischen Eigenschaften der im Maschinenbau vorkommenden Getriebe zu erkennen und konstruktiv bearbeiten zu können.

In der vorliegenden zweiten Auflage waren nur geringfügige Verbesserungen und Ergänzungen gegenüber der ersten Auflage erforderlich. Dagegen ist erfreulicherweise eine Sammlung zahlreicher Aufgaben zum gründlichen Einüben des dargebotenen Lehrstoffes hinzugekommen, wobei vorwiegend maschinentechnische Objekte herangezogen wurden.

Nach der günstigen Aufnahme der ersten Auflage, bei der gediegenen Ausstattung, die die zweite Auflage durch den Verlag erhielt und bei dem mäßigen Preise ist zu hoffen, daß das Werk auch weiterhin die Verbreitung findet, die es verdient.

Freiberg (Sa.)

W. Schmid.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Technische Hausmitteilungen des Nordwestdeutschen Rundfunks. Sonderheft: Unterlagen für UKW-Netzplanungen. 44 S. mit 39 Abb. Hamburg 1952. H. H. Nölke Verlag. Preis brosch. 6,50 DM.

Paul Günther, Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei partiellen Differentialgleichungen vom normalen hyperbolischen Typus (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Band 100. Heft 2). 43 S. Berlin 1952. Akademie-Verlag. Preis brosch. 5,—DM.

Alfred Müller, Die Schaubarkeit in der Axonometrie (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Band 100, Heft 3). 22 S. mit 3 Tafeln. Berlin 1952. Akademie-Verlag. Preis brosch. 3,—DM.

Prof. Dr. H. Brandt, Über Stammfaktoren bei ternären quadratischen Formen (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Band 100. Heft 1). 24 S. Berlin 1952. Akademie-Verlag. Preis brosch. 2,25 DM.

Dr. Milan Vidmar (Prof. a. d. Techn. Hochschule Ljubljana), Die Gestalt der elektrischen Freileitung. (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften. Band 21). 199 S. mit 49 Abb. Basel 1952. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 16,65 Fr. geb. 19,75 Fr.

Dr. W. Meyer zur Capellen, Instrumentelle Mathematik für den Ingenieur. (Fachbücher für Ingenieure.) 383 S. mit 190 Abb. Essen 1952. Verlag W. Girardet. Preis geb. 27,80 DM.

NACHRICHTEN

Prof. Dr. Pöschl 70 Jahre alt

Am 6. September vollendete der o. Professor der Mechanik und der angewandten Mathematik an der Technischen Hochschule Karlsruhe Theodor Pöschl das siebenzigste Lebensjahr. Er studierte an der Technischen Hochschule seiner Geburtsstadt Graz, an der er auch 1907 promovierte und sich 1910 bei Wittenbauer für „Allgemeine und technische Mechanik“ habilitierte. 1912 wurde er an die Deutsche Technische Hochschule Prag zunächst als a. o. Professor berufen, wurde aber schon 1916 zum Ordinarius ernannt. Wiederholt war er in Prag Dekan und Rektor. Dort schrieb er außer zahlreichen, wertvollen wissenschaftlichen Abhandlungen, die zum größten Teil in der Z. angew. Math. Mech. veröffentlicht sind, eine Reihe bekannter und viel gebrauchter Lehrbücher, so das zweibändige Lehrbuch über Technische Mechanik, zusammen mit Terzaghi das Buch über Berechnung von Behältern, zusammen mit Wittenbauer das über graphische Dynamik; ferner überarbeitete er die Wittenbauersche Aufgabensammlung zur Technischen Mechanik. Fast alle diese Bücher

erlebten mehrfache Auflagen. Zu erwähnen ist weiter seine Mitarbeit an dem Handbuch der Physik und an dem Lehrbuch der Physik von Müller-Pouillet.

1928 folgte Pöschl einem Ruf an die Technische Hochschule Karlsruhe. Dort wurde ihm von 1937 bis 1945 durch die nationalsozialistische Regierung die Lehrtätigkeit verboten. Diese Zeit benutzte Pöschl zu eingehenden Forschungen auf dem Gebiet der Werkstoffprüfung und der Plastizitätstheorie, aus denen u. a. die in Zusammenarbeit mit der Firma Leitz gebaute Mikrozerreißmaschine hervorging. 1945 übernahm er wieder seinen Lehrstuhl und wurde für das Jahr 1946/47 zum Rektor seiner Hochschule gewählt. In diesem Jahr fand die von ihm vorbereitete Tagung der GaMM in Karlsruhe statt. 1949 ließ er eine ausgezeichnete Einführung in die analytische Mechanik erscheinen. Möge ihm, der kurz vor seinem siebenzigsten Geburtstag noch an der internationalen Mechanik-Tagung in Istanbul teilnehmen konnte die bisherige geistige und körperliche Frische und die Freude an wissenschaftlicher Arbeit lange erhalten bleiben.

Willers.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher Sammelnummer: 42 55 71. Postcheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/32/11/12. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft DM 6,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1207 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik. Satz und Druck: Druckerei „Thomas Müntzer“ Werk Langensalza (W 57 275 4022) (1). Printed in Germany.